第8卷 第3期
1995年10月
盐城工业专科学校学报
Journal of Yancheng College of Technology
Vol. 8 No. 3
Oct. 1995

广义对角占优矩阵的一些性质

杨载朴
(盐城工业专科学校,盐城,224003)

设 $A=(a_{jk})_{n\times n}$ 为 n 阶复矩阵(本文记为 $A\in C^{n\times n}$),记

$$\sigma_j=\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}|a_{jk}|,\quad j=1,\cdots,n \tag{1}$$

若 $|a_{jj}|>\sigma_j,j=1,\cdots,n$,则称 A 为(按行)严格对角占优矩阵。若 $\hat{A}=\frac{1}{2}(A+A^*)$ 为严格对角占优矩阵,则称 A 为共轭(严格)对角占优矩阵。关于各类对角占优矩阵特征值的分布,已在文献[1][2]中作了研究,本文在此基础上对范围更大的两类矩阵的特征值分布取得一些结果,并且进一步分析了一类矩阵的一些性质。

1 广义对角占优矩阵特征值的分布

定义1 设 $A=(a_{jk})_{n\times n}\in C^{n\times n}$,($n\geqslant 2$,下同),若对任意 $j,k(1\leqslant j,k\leqslant n;j\neq k)$,均有 $|a_{jj}a_{kk}|>\sigma_j\sigma_k$,其中 σ_j,σ_k 如(1)式所示,则称 A 为广义对角占优矩阵,记为 $A\in GD$。

显然,此定义是严格对角占优矩阵的定义的推广,此矩阵类与文[1]中所定义的准对角占优矩阵类也互不包含。

本文中,A 的特征值的全体记为 $\sigma(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$。

定理1 设 $A=(a_{jk})_{n\times n}\in GD$,且其对角线元素皆为实数,$\sigma(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$,若 $a_{jj}>0$,$j=1,\cdots,n$,则 $\mathrm{Re}(\lambda_m)>0,m=1,\cdots,n$;若 $a_{jj}<0,j=1,\cdots,n$,则 $\mathrm{Re}(\lambda_m)<0,m=1,\cdots,n$。

证 若 $a_{jj}>0,j=1,\cdots,n$,用反证法。设 $\lambda=a+bi$ 为 A 的任一特征值,其中 $a\leqslant 0$。由矩阵特征值的卵形定理[3],λ 必在 A 的某一个卵形

$$O_{jk}=\{Z|\ |Z-a_{jj}||Z-a_{kk}|\leqslant\sigma_j\sigma_k\}$$

之中(其中 $j\neq k$),即

$$|\lambda-a_{jj}||\lambda-a_{kk}|\leqslant\sigma_j\sigma_k \tag{2}$$

而 $|a-a_{jj}|=a_{jj}-a\geqslant a_{jj}=|a_{jj}|$,因而 $|\lambda-a_{jj}|=|(a+bi)-a_{jj}|=\sqrt{(a-a_{jj})^2+b^2}\geqslant|a-a_{jj}|\geqslant|a_{jj}|$。同理 $|\lambda-a_{kk}|\geqslant|a_{kk}|$。因此,$|\lambda-a_{jj}||\lambda-a_{kk}|\geqslant|a_{jj}||a_{kk}|=|a_{jj}a_{kk}|>\sigma_j\sigma_k$,与(2)式矛盾。说明此时 A 的特征值之实部皆为正。

同理可证,若 $a_{jj}<0,j=1,\cdots,n$,则 A 的特征值之实部皆为负。

例1
$$A_1=\begin{bmatrix}4.2 & 2 & i\\ 2 & 3 & \sqrt{2}(1+i)\\ 0 & 2 & 3.1\end{bmatrix}$$

$a_{11}=4.2,a_{22}=3,a_{33}=3.1$ 皆为正数,$\sigma_1=3,\sigma_2=4,\sigma_3=2$,所以 $|a_{11}a_{22}|>\sigma_1\sigma_2$,$|a_{11}a_{33}|>\sigma_1\sigma_3$,$|a_{22}a_{33}|>\sigma_2\sigma_3$,因此,$A_1\in GD$。据定理1,$A_1$ 的特征值之实部皆为正。而用文[1]中的方法不能得

此结论。

因埃米特(Hermite)矩阵的特征值均为实数，所以由定理1可得：

推论1　设$A=(a_{jk})_{n\times n}$为广义对角占优埃米特矩阵，若$a_{jj}>0,j=1,\cdots,n$，则A为正定型；若$a_{jj}<0,j=1,\cdots,n$，则A为负定型。

推论2　设$B=(b_{jk})_{n\times n}$为广义对角占优实矩阵，且$b_{jj}>0,j=1,\cdots,n$，则$\det B>0$。

证　由定理1知，B的特征值之实部皆为正。又因B为实矩阵，其虚特征值必成共轭对出现，故可设B的特征值为：

$$\lambda_1,\cdots,\lambda_l;a_1\pm b_1 i,\cdots,a_m\pm b_m i$$

其中，$\lambda_1,\cdots,\lambda_l;a_1,\cdots,a_m$均为正数，$l+2m=n$

$$\det B=\prod_{j=1}^{l}\lambda_j\prod_{k=1}^{m}(a_k+b_k i)(a_k-b_k i)=\prod_{j=1}^{l}\lambda_j\prod_{k=1}^{m}(a_k^2+b_k^2)>0$$　证毕。

上述定义还可推广如下：

定义2　设$A=(a_{jk})_{n\times n}\in C^{n\times n}$，若$A$可经一系列形如$K(j),\frac{1}{K}(j)$的变换(即将第$j$行元素乘以$K$，再将第$j$列元素乘以$\frac{1}{K}$)化为广义对角占优矩阵，则称$A$为广义准对角占优矩阵，此时有下列结果：

定理1a　设$A=(a_{jk})_{n\times n}$为广义准对角占优矩阵，且对角线元素皆为实数，$\sigma(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，若$a_{jj}>0,j=1,\cdots,n$，则$\mathrm{Re}(\lambda_m)>0,m=1,\cdots,n$；若$a_{jj}<0,j=1,\cdots,n$，则$\mathrm{Re}(\lambda_m)<0,m=1,\cdots,n$。

证　由定义2，存在非异对角矩阵$D=\begin{bmatrix}d_1 & & 0\\ & d_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n\end{bmatrix}$使$DAD^{-1}=B$为广义对角占优矩阵，显然，$A$与$B$特征值相同，对角线元素亦相同，由定理1知，若$a_{jj}>0,j=1,\cdots,n$，则$B$的特征值(亦为$A$的特征值)之实部皆为正，若$a_{jj}<0,j=1,\cdots,n$，则$A$的特征值之实部皆为负。

2　广义共轭对角占优矩阵特征值的分布

定义3　设$A=(a_{jk})_{n\times n}\in C^{n\times n}$，若$\hat{A}=\frac{1}{2}(A+A^*)$为广义对角占优矩阵，则称$A$为广义共轭对角占优矩阵，记为$A\in GC$，其中$A^*$表示$A$的共轭转置矩阵。

显然，$\hat{A}$的对角线元素皆为实数。

定理2　设$A=(a_{jk})_{n\times n}\in GC,\sigma(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，若$\mathrm{Re}(a_{jj})>0,j=1,\cdots,n$，则$\mathrm{Re}(\lambda_m)>0,m=1,\cdots,n$；若$\mathrm{Re}(a_{jj})<0,j=1,\cdots,n$，则$\mathrm{Re}(\lambda_m)<0,m=1,\cdots,n$。

证　记$\hat{A}=\frac{1}{2}(A+A^*)=(\hat{a}_{jk})_{n\times n}$，其特征值记为$\hat{\lambda}_1,\cdots,\hat{\lambda}_n$，因$A$为广义共轭对角占优矩阵，又因$\hat{A}=\hat{A}^*$，由定义3，$\hat{A}$为广义对角占优埃米特矩阵，且$\hat{a}_{jj}=\frac{1}{2}(a_{jj}+\bar{a}_{jj})=\mathrm{Re}(a_{jj})$，由推论1，若$\hat{a}_{jj}=\mathrm{Re}(a_{jj})>0,j=1,\cdots,n$，则$\hat{\lambda}_1,\cdots,\hat{\lambda}_n$皆为正数，又因对$A$的任一特征值$\lambda_m$，有文[3](P211)，

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}(\hat{\lambda}_j)\leqslant \mathrm{Re}(\lambda_m)\leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}(\hat{\lambda}_j)$$

因此，$\mathrm{Re}(\lambda_m)>0$。由 λ_m 的任意性知 $\mathrm{Re}(\lambda_m)>0, m=1\cdots,n$。

同理可证，若 $\mathrm{Re}(a_{jj})<0, j=1,\cdots,n$，则 $\mathrm{Re}(\lambda_m)<0, m=1,\cdots,n$。

例2

$$A_2=\begin{bmatrix}4+2i & 3-i & 0\\ 1-i & 3-i & 2-i\\ 0 & 2-i & 5+3i\end{bmatrix}\qquad A_2^*=\begin{bmatrix}4-2i & 1+i & 0\\ 3+i & 3+i & 2+i\\ 0 & 2+i & 5-3i\end{bmatrix}\qquad \hat{A}_2=\begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

因 $\hat{A}_2\in GD$，从而 $A_2\in GC$，又因 A_2 的对角线元素之实部皆为正，因而 A_2 的特征值之实部皆为正(此时，$\hat{A}_2$ 的特征值亦均为正)，而用文[2]中的方法不能得此结果。

由于 A^T 和 A 的特征值相同，因而本文1、2中的结果对列同样成立。另外，用上面之结果于 iA 可得到 A 的特征值虚部的相应估计。

3 一些其它性质

因广义对角占优矩阵是严格对角占优矩阵的推广，所以下列结果对严格对角占优矩阵亦成立。

定理3 设 $A=(a_{jk})_{n\times n}\in GD$，若 $D=\mathrm{diag}A, C=A-D, B=D^{-1}C$，则 $\rho(B)<1$，其中 $\rho(B)$ 为 B 的谱半径(即 B 的特征值模的最大值)。

证 首先注意到，由定义1知，对任意 $j,k(1\leqslant j,k\leqslant n;j\neq k)$，$|a_{jj}a_{kk}|>\sigma_j\sigma_k\geqslant 0$，因此 $a_{jj}\neq 0, j=1,\cdots,n$，而 $D=\mathrm{diag}A=\begin{bmatrix}a_{11} & & 0\\ & a_{22} & \\ 0 & \ddots & \\ & & a_{nn}\end{bmatrix}$ 因而 $D^{-1}=\begin{bmatrix}a_{11}^{-1} & & 0\\ & a_{22}^{-1} & \\ 0 & \ddots & \\ & & a_{nn}^{-1}\end{bmatrix}$ 存在。

$$C=A-D=\begin{bmatrix}0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0\end{bmatrix}\qquad B=D^{-1}C=\begin{bmatrix}0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}}\\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

所以 $\sigma_j(B)=\dfrac{\sigma_j(A)}{|a_{jj}|}, j=1,\cdots,n$。设 λ 为 B 的任一特征值，由卵形定理知，必有 $j,k(1\leqslant j,k\leqslant n;j\neq k)$，使

$$|\lambda-0||\lambda-0|\leqslant\sigma_j(B)\sigma_k(B)=\frac{\sigma_j(A)}{|a_{jj}|}\cdot\frac{\sigma_k(A)}{|a_{kk}|}<1$$

即 $|\lambda|^2<1$，因而 $|\lambda|<1$。由 λ 的任意性知 $\rho(B)<1$，证毕。

定理4 设 $A=(a_{jk})_{n\times n}$ 为广义对角占优实矩阵，且 $a_{jj}>0, j=1,\cdots,n$，则

(1) A 的所有主子式皆为正，特别地，A 的所有顺序主子式皆为正。

(2) A^{-1} 存在，且 A^{-1} 对角线元素皆为正。

证 (1)任取 A 的一个 k 阶主子式，若 $k=1$，结论显然正确，今设 $2\leqslant k\leqslant n$，对应的矩阵为：

(下转第115页)

$$
\begin{aligned}
&+(K-1)\left(\left|\int_{B_{K-1}}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{B_K}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|\right)\\
&+K\left(\left|\int_{B_K}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{b}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|\right)\\
&\leqslant M_1+\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}\right)+2\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots\\
&+(K-1)\left(\frac{1}{(K-1)^3}+\frac{1}{K^3}\right)+K\left(\frac{1}{K^3}+\frac{1}{K^3}\right)\\
&\leqslant M_1+2\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{K^2}\right)\\
&\leqslant M_1+2\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{K^2}=M_1+\frac{\pi^2}{3}=M
\end{aligned}
$$

M 为确定的正的常数。

综合(1)、(2)得对于任意常数 $b>a$，积分$\int_a^b g(x)f(x)$一定存在有界，定理必要性得证。

参考文献

江泽坚．数学分析．人民教育出版社．1978

(上接第110页)

$$
D=\begin{bmatrix}
a_{j_1j_1} & a_{j_1j_2} & \cdots & a_{j_1j_k}\\
a_{j_2j_1} & a_{j_2j_2} & \cdots & a_{j_2j_k}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{j_kj_1} & a_{j_kj_2} & \cdots & a_{j_kj_k}
\end{bmatrix}
$$

其中 $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n$。因 D 的第 m 行是由 A 的第 j_m 行去掉若干非对角线元素而得到，因此 $\sigma_{j_m}(A)\geqslant\sigma_m(D)$，$m=1,\cdots,k$。所以对任意 $p,m(1\leqslant p,m\leqslant k;p\neq m)$，有

$$|a_{j_pj_p}a_{j_mj_m}|>\sigma_{j_p}(A)\sigma_{j_m}(A)\geqslant\sigma_p(D)\sigma_m(D)$$

因而 D 为广义对角占优实矩阵，又因 D 的对角线元素(亦为 A 的对角线元素)皆为正，由推论2，$\det D>0$。

(2)由于 $\det A\neq0$，所以 A^{-1} 存在，且 $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}A_{11} & & *\\ & A_{22} & \\ & & \ddots & \\ * & & & A_{nn}\end{bmatrix}$，其中 A_{jj} 为 A 的元素 a_{jj} 的代数余子式，由(1)显然有 $A_{jj}>0$，$j=1,\cdots,n$，而 $\det A>0$，从而 A^{-1} 对角线元素皆为正。

参考文献

1　佟文廷．关于几类矩阵特征值分布．数学学报．1977，20(4)：272～275

2　张家驹．共轭对角占优矩阵的特征值分布．数学学报．1980，23(4)：544～546

3　Pullman，N. J. Matrix Theory and Applications. Marcel Dekker Inc. New York and Basel. 1976：209～227