TL－子群的正规 TL－子群*

曾祥中
（盐城教育学院，盐城，224002）

摘 要 利用一般的完备 Brouwer 格 L 及 L 上的无穷∨－分配 t－模定义 TL－子群的正规 TL－子群，讨论一些基本性质，并研究由 TL－子集生成的 TL－子群的正规 TL－子群。

关键词 群 TL－子群 正规 TL－子群 TL－子群的正规 TL－子群
分类号 O152

引 言

Rosenfeld[1]首先引入模糊子群的概念，Anthony 和 Sherwood[2]利用[0,1]上一般的 t－模取代特殊的 t－模"极小"重新定义此概念。其后，吴望名[3]引入 T－模糊子群的正规 T－模糊子群的概念，并深入研究它们的性质。

利用完备 Brouwer 格 L 上一般的无穷∨－分配 t－模 T，于延栋和王住登定义了 TL－子代数[4,5]，TL－子群和 Ω－TL－子群[6]。本文利用文献[3～6]提供的基本思想，引入 TL－子群的正规 TL－子群的概念，讨论他们的一些性质，并研究由 TL－子集生成的 TL－子群的正规 TL－子群。

关于 t－模和 L－子集的有关概念与符号均沿用[4,5]。

本文中，如无特别声明，L 表示任意给定的一个以 1 为最大元，以 0 为最小元的完备 Brouwer 格；T 表示 L 上任意给定的无穷∨－分配 t－模；G 表示任意给定的群，其单位元记做 e。此外，N 表示自然数集。

1 TL－子群与正规 TL－子群

为便于参考，首先我们引出 TL－子群和正规 TL－子群的有关定义和结论。

定义 1.1[6] 设 $\mu\in L^G$，若 μ 满足条件：

$$(G_1)\qquad \mu(e)=1,$$
$$(G_2)\qquad \mu(x^{-1})\geqslant\mu(x)\quad \forall\, x\in G,$$
$$(G_3)_T\qquad \mu(xy)\geqslant\mu(x)T\mu(y)\quad \forall\, x,y\in G,$$

则称 μ 为群 G 的 TL－子群。当 $T=\wedge$ 时，群 G 的 TL－子群又称为 G 的 L－子群。

群 G 的全体 TL－子群和全体 L－子群分别组成的集合依次记做 TL(G) 和 L(G)。当 $L=[0,1]$ 时，群 G 的 TL－子群和 L－子群又分别称为 G 的 T－模糊子群和模糊子群。

定义 1.2[6] 设 $\mu\in TL(G)$。若 μ 是 Abel L－子集，即：$\mu(xy)=\mu(yx)$，$\forall\, x,y\in G$，则称 μ 为群 G 的正规 TL－子群。当 $T=\wedge$ 时，群 G 的正规 TL－子群又称为 G 的正规 L－子群。

* 收稿日期：1996－09－02

群 G 的全体正规 TL－子群和全体正规 L－子群，分别组成的集合依次记为 $NTL(G)$ 和 $NL(G)$。此外，当 $L=[0,1]$ 时，正规 TL－子群和正规 L－子群又称为正规 T－模糊子群和正规模糊子群。

定理 1.1[6] 设 I 是任意非空指标集 那么，$\mu_i\in TL(G),i\in I\Rightarrow \bigwedge_{i\in I}\mu_i\in TL(G)$。

给定 $\mu\in L^G$。易见：$\wedge\{\upsilon|\mu\leqslant\upsilon,\upsilon\in TL(G)\}$ 是 G 的包含 μ 的最小 TL－子群。我们将这个 TL－子群称为由 L－子集 μ 生成的 TL－子群，记为 $<\mu>_T$。特别地，当 $T=\wedge$ 时，$<\mu>_T$ 称为由 L－子集 μ 生成的 L－子群，记为 $<\mu>$

定理 1.2[6] 设 $\mu\in L^G$，那么

$$<\mu>_T=1_{\{e\}}\vee(\bigvee_{n\in N}(\mu\vee\mu^{-1})^{n(T)})=\bigvee_{n\in N}(1_{\{e\}}\vee(\mu\vee\mu^{-1}))^{n(T)}$$

2 TL－子群的正规 TL－子群

定义 2.1 设 $\mu,\upsilon\in TL(G)$。如果 $\mu\leqslant\upsilon$ 且

$$\mu(xyx^{-1})\geqslant\mu(y)T(\upsilon T\upsilon)(x),\forall\ x,y\in G \qquad (*)$$

那么，称 μ 为 TL－子群 υ 的正规 TL－子群。当 $T=\wedge$ 时，TL－子群 υ 的正规 TL－子群又称为 L－子群 υ 的正规 L－子群。

注：当 $T=\wedge$ 时，不等式（*）变为

$$\mu(xyx^{-1})\geqslant\mu(y)\wedge\upsilon(x)\quad \forall\ x,y\in G$$

此外，由定义 2.1 可得如下结论：

（1）若 G_1 和 G_2 是 G 的两个子群，则 G_1 是 G_2 的正规子群的充要条件是：1_{G_1} 是 1_{G_2} 的正规 TL－子群。

（2）如果 $\mu\in NTL(G)$，$\upsilon\in TL(G)$，且 $\mu\leqslant\upsilon$，那么 μ 是 υ 的正规 TL－子群。

（3）每个 TL－子群是其自身的正规 TL－子群。

（4）$\mu\in L^G$ 是 G 的正规 TL－子群的充要条件是：μ 是 TL－子群 1_G 的正规 TL－子群。于是，定义 2.1 可以看成是定义 1.2 的拓广。

定理 2.1 设 $\mu,\upsilon\in TL(G)$ 且 $\mu\leqslant\upsilon$。那么下列条件是等价的：

（1）μ 是 υ 的正规 TL－子群。

（2）$\mu(yx)\geqslant\mu(xy)T(\upsilon T\upsilon)(y)\ \forall\ x,y\in G$。

（3）$1_{\{x\}}\cdot\mu\geqslant(\mu\cdot 1_{\{x\}})T(\upsilon T\upsilon)\ \forall\ x\in G$。

证明 略

定理 2.2 设 $\mu,\upsilon\in L(G)$。那么 μ 是 υ 的正规 L－子群的充要条件是：对于任意 $a\in L$，μ_a 是 υ_a 的正规子群。

证明 假定 μ 是 υ 的正规 L－子群，给定 $a\in L$，显然 μ_a 是 υ_a 的子群。如果 $x\in\upsilon_a$，且 $y\in\mu_a$，那么，$\mu(xyx^{-1})\geqslant\mu(y)\wedge\upsilon(x)\geqslant a\wedge a=a$，因此 $xyx^{-1}\in\mu_a$，于是，μ_a 是 υ_a 的正规子群。

反之，假定每个 $\mu_a(a\in L)$ 都是 υ_a 的正规子群。给定 $x,y\in G$，取 $a=\mu(y)\wedge\upsilon(x)$。那么，$y\in\mu_a$ 且 $xyx^{-1}\in\mu_a$。于是，$\mu(xyx^{-1})\geqslant a=\mu(y)\wedge\upsilon(x)$。因此，$\mu$ 是 υ 的正规 L－子群。

定理 2.3 设 $\upsilon\in TL(G)$ 且 μ 是 υ 的正规 TL－子群。那么，G_μ 是 G_υ 的正规子群。此外，当 T 是正则 t－模时，$Supp(\mu)$ 亦是 $Supp(\upsilon)$ 的正规子群。

证　明　易见：G_μ 是 G_υ 的子群且当 T 是正则 t－模时，$Supp(\mu)$ 亦是 $Supp(\upsilon)$ 的子群。设 $x\in G_\upsilon$ 且 $y\in G_\mu$。那么，$\mu(xyx^{-1})\geqslant\mu(y)T(\upsilon T\upsilon)(x)=1$，于是，$xyx^{-1}\in G_\mu$。因此，$G_\mu$ 是 G_υ 的正规子群。假定 T 是正则 t－模，给定 $x\in Supp(\upsilon)$ 和 $y\in Supp(\mu)$，则 $\mu(xyx^{-1})\geqslant\mu(y)T(\upsilon T\upsilon)(x)>0$，于是 $xyx^{-1}\in Supp(\mu)$。因此，$Supp(\mu)$ 是 $Supp(\upsilon)$ 的正规子群。

定理 2.4　若 $\mu\in NTL(G)$ 且 $\upsilon\in TL(G)$，则 $\mu T\upsilon$ 是 υ 的正规 TL－子群。

证　明　显然，$\mu T\upsilon\in TL(G)$ 且 $\mu T\upsilon\leqslant\upsilon$。此外，我们有

$$(\mu T\upsilon)(xyx^{-1}) = \mu(xyx^{-1})T\upsilon(xyx^{-1}) = \mu(y)T\upsilon(xyx^{-1}) \geqslant$$
$$\mu(y)T\upsilon(x)T\upsilon(y)T\upsilon(x^{-1}) = (\mu T\upsilon)(y)T(\upsilon T\upsilon)(x)\ \forall\ x,y\in G$$

因此，$\mu T\upsilon$ 是 υ 的正规 TL－子群。

定理 2.5　设 $\xi\in TL(G)$，如果 μ,υ 是 ξ 的正规 TL－子群且 $\mu\in NTL(G)$，那么，$\mu\cdot_T\upsilon$ 亦是 ξ 的正规 TL－子群。

证　明　假定 μ,υ 是 ξ 的正规 TL－子群且 $\mu\in NTL(G)$。则由[6]中定理 2.3 可知，$\mu\cdot_T\upsilon\in TL(G)$。由于 μ,υ 是 ξ 的正规 TL－子群，因而显然有：$\mu\cdot_T\upsilon\leqslant\xi\cdot_T\xi\leqslant\xi$。此外，我们有

$$\begin{aligned}(\mu\cdot_T\upsilon)(xyx^{-1}) &= \vee\ \{\mu(u)T\upsilon(v)\mid u,v\in G,uv=xyx^{-1}\} = \\ &\vee\ \{\mu(xux^{-1})T\upsilon(xvx^{-1})\mid u,v\in G,uv=y\}\geqslant \\ &\vee\ \{\mu(u)T\upsilon(v)T(\xi T\xi)(x)\mid u,v\in G,uv=y\} = \\ &(\vee\ \{\mu(u)T\upsilon(v)\mid u,v\in G,uv=y\})T(\xi T\xi)(x) = \\ &(\mu\cdot_T\upsilon)(y)T(\xi T\xi)(x)\ \forall\ x,y\in G\end{aligned}$$

因此，$\mu\cdot_T\upsilon$ 亦是 ξ 的正规 TL－子群。

定理 2.6　设 I 是任意非空指标集。如果 $\xi\in TL(G)$ 且每个 $\mu_i(i\in I)$ 是 ξ 的正规 TL－子群，那么，$\bigwedge_{i\in I}\mu_i$ 亦是 ξ 的正规 TL－子群。

证　明　假定每个 $\mu_i(i\in I)$ 是 ξ 的正规 TL－子群，则由[6]中定理 2.4 可知：$\bigwedge_{i\in I}\mu_i\in TL(G)$。显然，$\bigwedge_{i\in I}\mu_i\leqslant\bigwedge_{i\in I}\xi=\xi$。此外，我们有

$$\begin{aligned}\mu_i(xyx^{-1}) &\geqslant \mu_i(y)T(\xi T\xi)(x)\geqslant(\bigwedge_{i\in I}\mu_i)(y)T(\xi T\xi)(x)\ \forall\ i\in I \\ &\Rightarrow(\bigwedge_{i\in I}\mu_i)(xyx^{-1})=\bigwedge_{i\in I}\mu_i(xyx^{-1})\geqslant \\ &(\bigwedge_{i\in I}\mu_i)(y)T(\xi T\xi)(x)\ \forall\ x,y\in G。\end{aligned}$$

因此，$\bigwedge_{i\in I}\mu_i$ 亦是 ξ 的正规 TL－子群。

定理 2.7　设 $\upsilon\in L(G)$ 且 μ 是 υ 的正规 L－子群。假定 H 是一个群及 f 是 G 是 H 的同态。则 $f(\mu)$ 是 $f(\upsilon)$ 的正规 TL－子群。

证　明　显然，$f(\mu),f(\upsilon)\in L(H)$ 且 $f(\mu)\leqslant f(\upsilon)$。现在，我们有

$$\begin{aligned}f(\mu)(xyx^{-1}) &= \vee\ \{\mu(z)\mid z\in G,f(z)=xyx^{-1}\}\geqslant \\ &\vee\ \{\mu(uvu^{-1})\mid u,v\in G,f(u)=x,f(v)=y\}\geqslant \\ &\vee\ \{\mu(v)\wedge\upsilon(u)\mid u,v\in G,f(u)=x,f(v)=y\} = \\ &(\vee\ \{\mu(v)\mid V\in G,f(v)=y\})\wedge(\vee\ \{\upsilon(u)\mid u\in G,f(u)=x\}) = \\ &f(\mu)(y)\wedge f(\upsilon)(x)\ \forall\ x,y\in H。\end{aligned}$$

因此，$f(\mu)$ 是 $f(\upsilon)$ 的正规 L－子群。

定理 2.8　假定 H 是一个群及 f 是 G 到 H 的同态。若 $\upsilon\in TL(H)$ 且 μ 是 υ 的正规 TL－子群，则 $f^{-1}(\mu)$ 是 $f^{-1}(\upsilon)$ 的正规 TL－子群。

证　明　显然，$f^{-1}(\mu),f^{-1}(\upsilon)\in TL(G)$ 且 $f^{-1}(\mu)\leqslant f^{-1}(\upsilon)$。现在，我们有

$$f^{-1}(\mu)(xyx^{-1})=\mu(f(xyx^{-1}))=\mu(f(x)f(y)f(x)^{-1})\geqslant$$
$$\mu(f(y))T(\upsilon T\upsilon)(f(x))=f^{-1}(\mu)(y)T(f^{-1}(\upsilon)Tf^{-1}(\upsilon))(x)\ \forall\ x,y\in G$$

因此，$f^{-1}(\mu)$ 是 $f^{-1}(\upsilon)$ 的正规 TL－子群。

3　由 L 子集生成的 TL－子群的正规 TL－子群

设 $\xi\in TL(G)$ 且 $\mu\leqslant\xi$。则由定理 2.6 可知，$\wedge\{\upsilon|\mu\leqslant\upsilon,\upsilon$ 是 ξ 的正规 TL－子群$\}$ 是 ξ 的包含 μ 的最小正规 TL－子群。我们将这个 ξ 的正规 TL－子群称为由 L－子集 μ 生成的 ξ 的正规 TL－子群。特别地，当 $T=\wedge$ 时，由 μ 生成的 ξ 的正规 TL－子群又称为由 μ 生成的 ξ 的正规 L－子群。

定义 3.1　设 $\mu,\xi\in L^G$。定义 $\mu_\xi\in L^G$ 如下：

$$\mu_\xi(y)=\vee_{x\in G}(\xi(x)\wedge\mu(xyx^{-1})\wedge\xi(x^{-1}))\ \forall\ y\in G。$$

定理 3.1　设 $\mu,\upsilon\in L^G$ 且 $\xi\in L(G)$。那么

(1) $\mu_\xi\geqslant\xi$，

(2) $(\mu_\xi)^{-1}=(\mu^{-1})_\xi$，

(3) $\mu_\xi(zyz^{-1})\geqslant\mu_\xi(y)\wedge(\xi\wedge\xi)(z)\ \forall\ y,z\in G$，

(4) $(\mu_\xi\cdot\upsilon_\xi)(zyz^{-1})\geqslant(\mu_\xi\cdot\upsilon_\xi)(y)\wedge(\xi\wedge\xi)(z)\ \forall\ y,z\in G.$

证明 (1) 与 (2) 显然成立。

对于任意 $y,z\in G$，我们有

$$\begin{aligned}\mu_\xi(zyz^{-1})&=\vee_{x\in G}(\xi(x)\wedge\mu(x(zyz^{-1})x^{-1})\wedge\xi(x^{-1}))=\\&\vee_{x\in G}(\xi((xz)z^{-1}\wedge\mu((xz)y(xz)^{-1})\wedge\xi(z(xz)^{-1}))=\\&\vee_{x\in G}(\xi(xz^{-1})\wedge\mu(xyx^{-1})\wedge\xi(zx^{-1}))\geqslant\\&\vee_{x\in G}(\xi(x)\wedge\xi(z^{-1})\wedge\mu(xyx^{-1})\wedge\xi(z)\wedge\xi(x^{-1}))=\\&(\vee_{x\in G}(\xi(x)\wedge\mu(xyx^{-1})\wedge\xi(x^{-1})))\wedge(\xi\wedge\xi)(z)=\\&\mu_\xi(y)\wedge(\xi\wedge\xi)(z)\end{aligned}$$

因此，(3) 式成立。

由 (3) 式可得

$$\begin{aligned}(\mu_\xi\cdot\upsilon_\xi)(zyz^{-1})&=\vee\{\mu_\xi(u)\wedge\upsilon_\xi(v)|u,v\in G,uv=zyz^{-1}\}=\\&\vee\{\mu_\xi(zuz^{-1})\wedge\upsilon_\xi(zvz^{-1})|u,v\in G,uv=y\}\geqslant\\&\vee\{\mu_\xi(u)\wedge(\xi\wedge\xi)(z)\wedge\upsilon_\xi(v)\wedge(\xi\wedge\xi)(z)|u,v\in G,uv=y\}=\\&(\vee\{\mu_\xi(u)\wedge\upsilon_\xi(v)|u,v\in G,uv=y\})\wedge(\xi\wedge\xi)(z)=\\&(\mu_\xi\cdot\upsilon_\xi)(y)\wedge(\xi\wedge\xi)(z)\ \forall\ y,z\in G。\end{aligned}$$

因此，(4) 式成立。

定理 3.2　设 $\mu\in L^G,\xi\in L(G)$ 且 $\mu\leqslant\xi$，那么

$$<\mu_\xi>=1_{(e)}\vee(\bigvee_{n\in N}(\mu_\xi\vee(\mu_\xi)^{-1})^n)=\bigvee_{n\in N}(1_{(e)}\vee(\mu_\xi\vee(\mu_\xi)^{-1}))^n$$

是由 μ 生成的 ξ 的正规 L－子群。

证　明　首先，由定理 1.2 得，$<\mu_\xi>$ 是 G 的 L－子群。其次，对于任意 $y\in G$，我们有

$$\mu_\xi(y)=\vee_{x\in G}(\xi(x)\wedge\mu(xyx^{-1})\wedge\xi(x^{-1}))\leqslant$$
$$\vee_{x\in G}(\xi(x)\wedge\xi(xyx^{-1})\wedge\xi(x^{-1}))\leqslant$$
$$\vee_{x\in G}\xi(x^{-1}xyx^{-1}x)=\xi(y)$$

因此，$\mu_\xi\leqslant\xi$。于是 $<\mu_\xi>\leqslant<\xi>=\xi$。此外，由定理 3.1 及其证明可得：

$$(\mu_\xi\vee(\mu_\xi)^{-1})(zyz^{-1})=\mu_\xi(zyz^{-1})\vee(\mu_\xi)^{-1}(zyz^{-1})=$$
$$\mu_\xi(zyz^{-1})\vee\mu_\xi(zy^{-1}z^{-1})\geqslant$$
$$(\mu_\xi(y)\wedge(\xi\wedge\xi)(z))\vee(\mu_\xi(y^{-1})\wedge(\xi\wedge\xi)(z))=$$
$$(\mu_\xi(y)\vee(\mu_\xi)^{-1}(y))\wedge(\xi\wedge\xi)(z)=$$
$$(\mu_\xi\vee(\mu_\xi)^{-1})(y)\wedge(\xi\wedge\xi)(z)\ \forall\ y,z\in G$$

类似地

$$(\mu_\xi\vee(\mu_\xi)^{-1})^n(zyz^{-1})\geqslant(\mu_\xi\vee(\mu_\xi)^{-1})^n(y)\wedge(\xi\wedge\xi)(z)\ \forall\ y,z\in G$$

于是

$$<\mu_\xi>(zyz^{-1})\geqslant<\mu_\xi>(y)\wedge(\xi\wedge\xi)(z)\ \forall\ y,z\in G$$

因此，$<\mu_\xi>$ 是 ξ 的正规 L－子群。最后，设 $\eta\in L(G)$ 且 $\eta\geqslant\mu$。若 η 是 ξ 的正规 L－子群，则由定义 2.1 可得

$$\eta(y)=\eta(x^{-1}(xyx^{-1})x)\geqslant\eta(xyx^{-1})\wedge(\xi\wedge\xi)(x)\geqslant$$
$$\xi(x)\wedge\mu(xyx^{-1})\wedge\xi(x^{-1})\ \forall\ x,y\in G$$

于是

$$\eta(y)\geqslant\vee_{x\in G}(\xi(x)\wedge\mu(xyx^{-1})\wedge\xi(x^{-1})=\mu_\xi(y)\ \forall\ y\in G$$

即：$\eta\geqslant\mu_\xi$。因而 $\eta=<\eta>\geqslant<\mu_\xi>$。因此，$<\mu_\xi>$ 是包含 μ 的 ξ 的最小正规 L－子群，即是由 μ 生成的 ξ 的正规 L－子群。

参考文献

1　A. Rosenfeld, Fuzzy groups, J. Math. Anal. Appl. 35(1971)512～517

2　J. M. Anthony and H. sherwood, Fuzzy groups redefined, J. Math. Appl. 69(1979)124～130

3　吴望名. Fuzzy congruences and normal fuzzy subgroups，应用数学. 1988(第 3 卷)，9～20

4　于延栋. L－subsets and L－universal algebras, In: Advances in Fuzzy Theory and Technology, Vol. 1(Bookwrights－Indepedent Book Producers, North Carolina, 1993)91～114

5　王住登. On L－subsets and TL－subalgebras, Fuzzy Sets and Systems 1994(65), 59～69

6　王住登. TL－子群和 Ω－TL－子群. 中国青年科学技术论文精选. 中国科学技术出版社. 1994. 244～250