

轴测图中的对称现象及其应用

郝瑞华

(江南社会学院, 无锡, 214000)

摘要 对正等测、二测和三测图的对称现象进行了探讨和分析, 得出了三种轴测图中图形对称存在的条件。并列举了应用这些条件绘制对称图形的实例。

关键词 轴测图 对称

分类号 TH126

对称是几何图形中一种常见现象和重要特征, 利用图形的对称性可以简化作图。轴测图中也广泛存在着对称现象。对于轴测图中的这一现象, 未见有文献分析和利用。本文就想对这一命题作一浅析, 从中发掘一些轴测图中对称图形存在的规律和简化作图方法。

一、轴测图中的对称现象及其分析

1、正等测图中的对称现象及其分析

(1) 不同坐标面上图形的对称

图1所示为一正方体的正等测图。 $\square OADB$ 和 $\square OAF C$ 共轴测轴 OX , 且位于该轴异侧。 OA 、 OB 、 OC 为三轴测轴的方向, 也是立方体的长、宽、高三条边。由于图示立体为正立方体, 且轴向变化率相同, 所以有 $OA = OB = OC = BD = CF = AD = CE = AF = BE$ 。

若连接图中 DF 两点, 则三角形 ADF 为一等腰三角形。又由于 $\angle OAD = \angle OAF = 60^\circ$, 所以 OA 为 $\triangle ADF$ 的高 AM 之延长线。也即 $DF \perp OA$, 且 $DM = MF$ 。据此, 顶点 D 和 F 为关于 OA 的两个对称点。同理, B 、 C 也是如此。由此可知,

$\square OADB$ 关于轴测轴 OX 对称 $\square OAF C$ 。将此推广, 若在顶面 $OADB$ 上有一点 T 和在前面 $OAF C$ 上有一点 R , 当它们有相同的 X 坐标, 且它们的另一坐标 Y 和 Z 的绝对值也相等时, 则它们在正等测图中, 也关于轴测轴 OX 对称。

根据同样道理, 图1中 $\square OADB$ 和 $\square OBEC$ 关于轴测轴 OY 对称。 $\square OBEC$ 和 $\square OAF C$ 关于轴测轴 OZ 对称。此外, 顶面 $OADB$ 上一点 T 和侧面 $OBEC$ 上一点 P , 当 $|x_t| = |z_p|$, $y_t = y_p$ 时, T 、 P 在图中也关于轴测轴 OY 对称。侧面 $OBEC$ 上点 P 和前面 $OAF C$ 上点 R , 当 $z_p = z_r$, 且 $|x_r| = |y_p|$ 时, P 、 R 在图中也关于轴测轴 OZ 对称。

由以上分析可以得出结论:

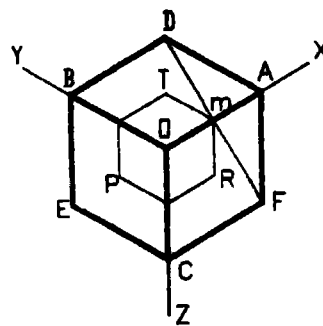


图1

结论一 在正等测图中,在公共轴测轴异侧的两个坐标面上,具有相同公共坐标和另一坐标的绝对值相等的两个点,关于公共轴测轴相对称。

(2) 同一坐标面上图形的对称

图2为同一水平面上分别位于对角象限上Ⅱ中两图形的正等测图,其中 $\square OACE$ 和 $\square OBD F$ 的对应边 $OA \parallel EC \parallel OX$, $OB \parallel DF \parallel OY$;且 $|OA| = |OB| = |EC| = |DF|$, $|OE| = |OF| = |AC| = |BD|$ 。按图1分析方法,不难证明 $\square OACE$ 和 $\square OBD F$ 关于 $\angle AOB$ 的平分线 OL 对称(具体分析方法不再赘述)。与此类同,图3中在同一水平坐标面 OXY 上位于Ⅱ、Ⅳ象限中的 $\square OACE$ 和 $\square OBD F$,当 $|OA| = |OB|$, $|OE| = |OF|$ 时,它们关于 $\angle AOB$ 的平分线 OL 对称。

图2、图3的情况推广到 XOZ 和 YOZ 坐标面上,同样存在着相同的现象。如图4、图5所示, $\square OACE$ 和 $\square OBD F$ 均关于 $\angle AOB$ 的角平分线相对称。

综上所述,可得出下面结论:

结论二 在同一坐标面上,位于对角象限内的两点,若它们在该坐标面上的二维坐标的绝对值交叉相等(即 $|X_g| = |Y_h|$, $|Y_g| = |X_h|$,见图2),则它们在正等测图中关于相应轴测轴夹角的平分线相对称。

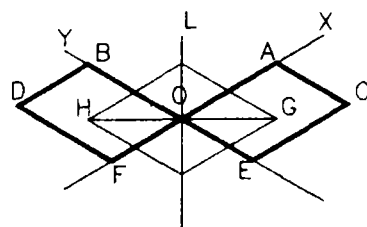


图2

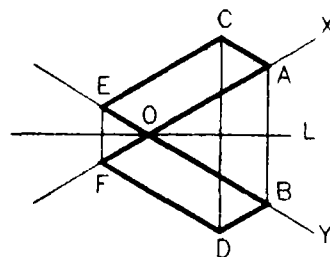
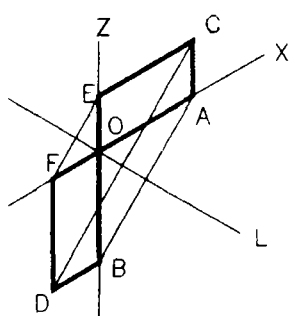
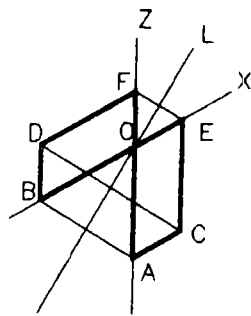


图3

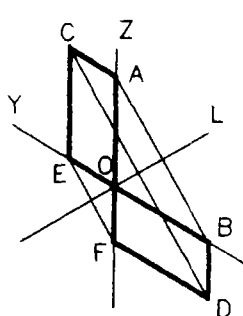


(1)

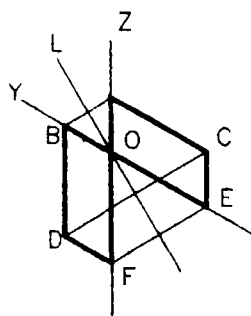


(2)

图4



(1)



(2)

图5

图6是同一坐标面上两点的又一种情况,图中,A、B两点也分别位于对角象限Ⅰ、Ⅲ,它们的X、Y坐标的绝对值分别相等。即 $|Oa_x| = |Ob_y|$, $|Oa_y| = |Ob_x|$,很明显,AOB是由两X、Y坐标引成的平行四边形的对角线,且O点是AB的中点,这种情况,不但在 XOY 坐标面上存在,在 XOZ 和 YOZ 坐标面上同样存在。据此,又可得出结论:

结论三 同一坐标面上,位于二维对角象限内的两点,若

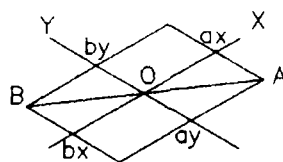


图6

它们的同一坐标的绝对值相等,则它们关于原点(也即两点连线的中点)成中心对称。

2、二测图中的对称现象及其分析

(1)不同坐标面上图形的对称

图 7 为一正方体的正二测图, $\square OABC$ 、 $\square OCDE$ 为在共同的轴测轴 Y 两侧的两坐标面上的图形,由于轴测轴 OX 和 OZ 的轴向变化率相等,所以 $\square OAFE$ 为一菱形,对角线 OF 与 AE 互相垂直平分,且 OF 平分角 AOE ,这说明 CO 与 OF 在同一直线上。由此可知,点 A 、 E 和点 B 、 D 均关于轴测轴 Y 对称。

图 8 所示为一正方体的斜二测图。与图 7 情况相同。 OXY 坐标面的 $\square OABC$ 与 OYZ 坐标面的 $\square OCDE$ 同样关于公共轴测轴 Y 对称。

由此得出结论:

结论四 二测图中,在公共轴测轴 Y 异侧两坐标面上的两点,若它们具有同一的 Y 坐标且另一平面坐标的绝对值相等(图 7、8 中 $|X_b| = |Z_d|$),则它们关于公共轴测轴 Y 对称。

(2)同一坐标面上图形的对称

由于二等测图的三轴向变化率中仅在 X 、 Z 方向相等,故结论二只适用于 XOZ 坐标面上图形,而不适用于 XOY 和 YOZ 坐标面。但结论三仍然适用于二等测图的任何坐标面上的图形。

3、三轴图中的对称问题

由于三测图的三轴向变化率均不相等,所以,不同坐标面上点的对称无规律可循。但结论三归纳的同一坐标面两点的对称规律仍适用于三测图中,其分析方法无异。

二、对称现象在作图中的应用

1、利用轴对称作图

图 9 所示立体,其水平方向结构与正平方向结构相同,且其中的圆心,位于轴测轴 OX 的两侧,并具有公共的 X 坐标,又 $|OB| = |OA|$ 。它符合结论一所述的情况,故两部分结构关于轴测轴 OX 对称。据此,只要作出其中一部分的图形就可利用轴对称较方便地作出另一部分图形。若用手工作图,可先求出各圆心的对称点,然后利用对应的半径,画出对称圆弧,再作直线完成作图。若使用二维绘图软件,即可调用镜像命令一次完成作图。

图 10 是两个相同大小的圆锥齿轮啮合示意图,因它们的轴线正交,所以,不管用正等测或二等测表示,只要作出一个的轴测图,便能利用它们的公共轴测轴(OY)作出与其对称的另一图形。

图 11 所示立体的前端和左端两形体的形状、大小均相同,且两圆孔中心的 x 、 y 坐标交差相等,因此,它们的对应部分在正等测图中,关于轴测轴 X 、 Y 的角平分线对称。据此,只要作出一端的正等测图后,即可借助对称轴 L 作出与之对称的另一端的正等测图。

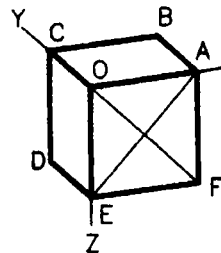


图 7

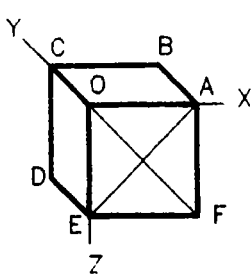


图 8

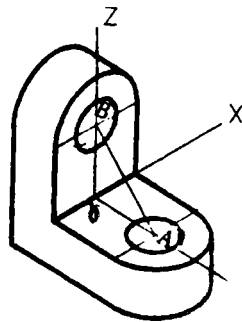


图 9

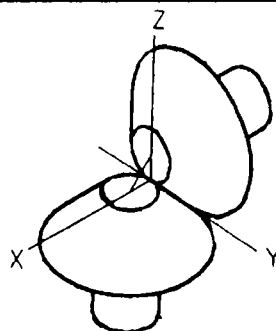


图 10

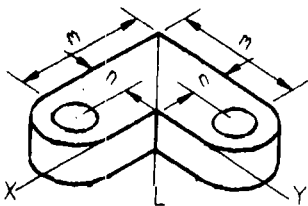


图 11

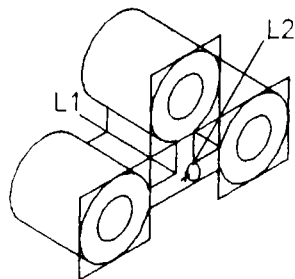


图 12

图 12 所示立体也属于同类情况,三圆柱体前端面都位于 XOZ 坐标面上,且它们的大小相等(含孔径),孔心离开 O 点的距离也相等,因此,它们的正等测图符合结论二的规律,据此,可先作出任一圆柱前端的正等测圆后,就可利用过 O 点的轴测轴 OX 、 OY 的角平分线 L_1 和 L_2 作出另两个圆柱前端的正等测图。后端面的作法类同。然后,再补全它们的外形线,就可完成整体的作图。

2、利用中心对称作图

图 13 所示平板的顶面四个角的空间形状和大小均相同。无论在何种轴测图中,左前角和右后角,左后角和右前角均关于中心对称,据此,该平板顶面的轴测图,只要先作出左面两个圆角,然后利用对称中心,作出右端前面角的轴测图。四圆孔顶端的圆只要作出一个的轴测图(如左前孔),然后利用一端的对称中心(如 M)作出另一椭圆。再利用对称中心作出另一端的两个椭圆。顶面的图形完成之后再沿 Z 轴方向复制底面的相应圆角和画出外形线,即可完成整体轴测图。

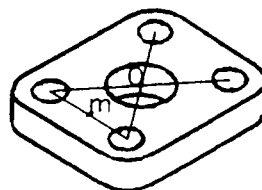


图 13

3、利用对称与平移相结合作图

图 14 所示立体前后两端的结构形状和大小均相同,但不在同一水平面上,且方向相反。对于这种立体,可先利用中心对称,作出后顶面的对称图形(图中 O 点为对称中心,双点划线部分为复制图形)。然后再沿 Z 方向,平移对称获得的顶面图形,作出前下端的顶面。顶面作出后,底面只要沿 Z 方向复制相应圆弧。

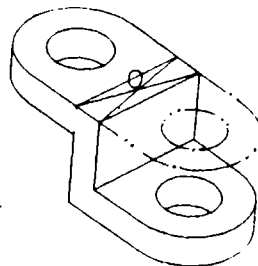


图 14

三、结束语

本文对轴测图中的对称现象作了初步的归纳分析,得出了一些结论,并列举了应用这些结论作轴测图的一些实例。文中的归纳、分析和举例很可能极不全面。但就这一命题的提出和探讨开了一个头,但愿能引起同行的兴趣,以求共同探讨与研究。关于轴测图的对称现象应用于轴测图的作图,可能对手工作图其优点并不明显,但应用于计算机绘图中,其优越性可有较大体现。

参考文献

- 1 朱辉等编著. 高等画法几何学. 上海:上海科学技术出版社. 1985
- 2 龙泽斌著. 几何变换. 长沙:湖南科学技术出版社. 1984