

自然坐标系中运动方程与轨迹方程的新形式及其应用

俞晓明, 史友进

(盐城工学院 基础教学部, 江苏 盐城 224051)

摘要:在自然坐标系中提出以速度倾角和曲率半径为坐标, 得到新形式的运动方程和轨迹方程。讨论自然坐标与直角坐标间的变换式, 并以两个典型问题的求解说明新形式轨迹方程运用的便捷性。

关键词:自然坐标系; 速度倾角; 运动方程; 轨迹方程; 变换式; 最速降线

中图分类号: O311.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-5322(2012)02-0015-03

为定量描述物体的运动, 常在参考系上建立适当的坐标系。直角坐标系是基本坐标系, 极坐标系、球坐标系、柱坐标系、自然坐标系等是典型的常用坐标系。选用合适的坐标系, 可使问题的求解过程得到简化, 确保求解结果的正确与简单。

自然坐标系常取 s (有向弧)、 ρ (轨道曲率半径) 为坐标, 如切向加速度和法向加速度的表示。事实上, 自然坐标系有 3 个坐标 s 、 ρ 、 α (轨道切向即速度方向与 x 轴正向间的夹角), 在解决某些问题时取 s 、 α 或 ρ 、 α 为坐标尤为便捷。一般的大学物理和理论力学教材中, 常称轨道形状已知, 就是指 $\rho = \rho(s)$ 或 $\alpha = \alpha(s)$ 已知。本文仅讨论平面运动, 选择 ρ 、 α 作为自然坐标系的坐标, 既得到新形式的运动方程和轨迹方程, 也得到自然坐标与直角坐标间的变换式, 最后以两个典型问题的求解说明了新形式轨迹方程运用的便捷性。

1 新形式的运动方程和轨迹方程

在直角坐标系中描述质点的平面运动常用运动方程 $x = x(t)$ 、 $y = y(t)$ 与轨迹方程 $y = y(x)$; 在自然坐标系中人们习惯用运动方程

$$\left. \begin{aligned} s &= s(t) \\ \rho &= \rho(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

与轨迹方程

$$\rho = \rho(s) \quad (2)$$

这两种描述等价对应。

式(1)是自然坐标系中常见形式的运动方

程, 对处理质点沿圆周(圆弧)运动时(此时 $\rho = R$ 恒定且已知)比较方便, 对于质点运动过程中曲率半径时刻改变如质点沿抛物线等一般曲线运动则比较困难。

若定义速度倾角 α (α 为质点运动速度 v 与 x 轴间的夹角), 则

$$\alpha = \arctan \left[\frac{v_y(t)}{v_x(t)} \right] = \arctan \left[\frac{dy(t)}{dx(t)} \right] = \alpha(t) \quad (3)$$

因此, 在自然坐标系中描述质点作平面曲线运动可用如下形式的运动方程

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha(t) \\ \rho &= \rho(t) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由式(4)消去参量即得相应的轨迹方程

$$\rho = \rho(\alpha) \quad (5)$$

自然坐标 $s = s(t)$ 、 $\alpha = \alpha(t)$ 和 $\rho = \rho(t)$ 并不相互独立, 由曲率半径的定义式 $\rho(\alpha) = \frac{ds}{d\alpha}$, 得

$$s = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \rho(\alpha) d\alpha \quad (6)$$

式(4)为自然坐标系中运动方程的新形式, 式(5)为与式(4)对应的新形式轨迹方程, 式(6)为 3 个坐标 s 、 α 和 ρ 间的约束关系。

2 自然坐标与直角坐标间的变换式

极坐标 ρ 、 θ 与平面直角坐标 x 、 y 有一一对应的关系, 存在变换式

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \rho(t) \cos[\theta(t)] \\ y(t) &= \rho(t) \sin[\theta(t)] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

和逆变换式

$$\left. \begin{aligned} \rho(t) &= \{ [x(t)]^2 + [y(t)]^2 \}^{1/2} \\ \theta(t) &= \arctan \left[\frac{v_y(t)}{v_x(t)} \right] = \arctan \left[\frac{dy(t)}{dx(t)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式(7)、(8)中 $\theta(t)$ 为极径与固定参考轴(习惯上取 Ox 轴)间的夹角。因式(8)中正切函数具有多值性,同一坐标 x, y 将对应不同的极角 $\theta(t)$ 。

自然坐标系中,由 $\rho(\alpha) = \frac{ds}{d\alpha}$ 及 $dx = ds \cos \alpha$ 、 $dy = ds \sin \alpha$ 得

$$\left. \begin{aligned} x &= \int_{\alpha_0}^{\alpha} \rho(\alpha) \cos \alpha d\alpha \\ y &= \int_{\alpha_0}^{\alpha} \rho(\alpha) \sin \alpha d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(9)为自然坐标 s, ρ 和 α 与直角坐标 x, y 间的变换式。

其逆变换式为

$$\left. \begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \{ [\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 \}^{1/2} dt \\ \rho(t) &= \frac{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 \}^{3/2}}{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)|} \\ \alpha(t) &= \arctan \left[\frac{v_y(t)}{v_x(t)} \right] = \arctan \left[\frac{dy(t)}{dx(t)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

同样,式(10)中正切函数具有多值性,同一坐标 x, y 将对应不同的速度倾角 $\alpha(t)$ 。

3 实例分析

实例 1:文献[1]计算了质量为 m 的物体沿半径为 R 的 $1/4$ 圆周从点 A 自静止开始下滑到点 B 时的速度。

如图 1,在自然坐标系中质点切向动力学方程为

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \alpha - \mu F_N \quad (11)$$

法向动力学方程为

$$-mg \cos \alpha + F_N = m \frac{v^2}{\rho} \quad (12)$$

式(11)、(12)中, g 为重力加速度, $\alpha(0 \leq \alpha \leq 2\pi)$ 为速度倾角, ρ 为轨道的曲率半径。

将式(12)代入式(11)并利用 $\rho(\alpha) = \frac{ds}{d\alpha}$ 计算得

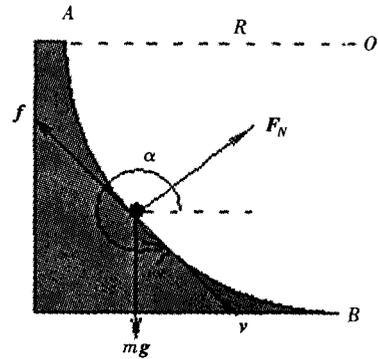


图 1 质点沿 $1/4$ 圆周下滑受力图

Fig. 1 Force diagram of a mass point sliding along $1/4$ circular arc

$$\frac{dv^2}{d\alpha} + 2\mu v^2 = -2\rho g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \quad (13)$$

应用初始条件 $\alpha_0 = \frac{3}{2}\pi$ 、 $\rho(\alpha) = R$ 和 $v_0 = 0$ 积分式(13)得

$$v^2 = 2gR \frac{(1 - 2\mu^2) \cos \alpha + 3\mu(-\sin \alpha - e^{-2\mu\alpha})}{1 + 4\mu^2} \quad (14)$$

式(14)中选取的参变量为 α ,而文献[1]中选用的参变量为 θ 。两者关系为 $\alpha = \theta + \frac{3}{2}\pi$,有 $\sin \alpha = -\cos \theta$ 、 $\cos \alpha = \sin \theta$,因此式(14)与文献[1]中式(4)完全一致。

实例 2:文献[2,3]要求计算沿抛物线 $y^2 = 2px$ 运动,且切向加速度的量值为法向加速度量值的 $-2k$ 倍时质点从正焦弦的一端 $(\frac{p}{2}, p)$ 以 u 出发运动到正焦弦另一端 $(\frac{p}{2}, -p)$ 处的速度。

本实例的一般解法是先列出质点运动的切向动力学方程,后辅以曲率半径的公式,最后再用换元积分得出结论,解题过程比较繁杂,以速度倾角为坐标可作如下解算。

如图 2,质点处于点 $(\frac{p}{2}, p)$ 时, $\alpha_0 = \frac{5}{4}\pi$,处于点 $(\frac{p}{2}, -p)$ 时, $\alpha_f = \frac{7}{4}\pi$ 。根据题意有

$$\frac{dv}{dt} = -2k \frac{v^2}{\rho} \quad (15)$$

即

$$\frac{\rho d\alpha}{dt} \frac{dv}{d\alpha} = -2kv^2 \text{ 或 } \frac{dv}{v} = -2k d\alpha \quad (16)$$

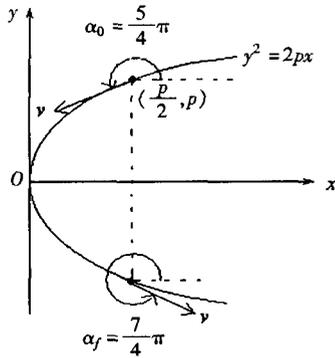


图2 质点沿抛物线 $y^2 = 2px$ 运动

Fig. 2 A mass point moving along the parabola

应用初始条件 $v_0 = u, \alpha_0 = \frac{5}{4}\pi, \alpha_f = \frac{7}{4}\pi$ 积分式(16)得

$$v = ue^{-k\pi}$$

4 讨论与后续研究

在自然坐标系中以速度倾角和曲率半径为坐标,既可得到新形式的运动方程和轨迹方程,亦可得到自然坐标与直角坐标间的变换式,两个典型

问题的求解说明自然坐标系中新形式的轨迹方程对处理质点沿平面曲线运动速度问题具有优越性。事实上,自然坐标系取 s, α 或 ρ, α 为坐标对处理质点沿平面曲线运动轨迹问题更有优越性。例如,质点沿最速降线下滑历时最短,最速降线轨迹方程可用 $\rho = 4a \cos \alpha$ 表示。

值得注意的是,自然坐标系中常规形式的运动方程式(1)对质点作平面任意曲线均适用,而新形式的运动方程式(4)和轨迹方程式(5)更适用于处理质点在一个周期内($0 \leq \alpha \leq 2\pi$)的平面曲线运动,对于一个周期之外($\alpha > 2\pi$),须分段考虑。

质点在沿最速降线下滑的过程中库仑摩擦力总是不可避免的存在,如何寻找库仑摩擦力作用下质点的速降线成为重要研究课题。作者根据库仑摩擦最速降问题的物理方程,以 ρ, α 为坐标,运用变分法得到 α 的时间变化率为常量,进而求得了速度、坐标的表达式并绘制出了库仑摩擦力作用下的最速降线。分析计算结果表明,初速为零的库仑摩擦最速降线具有速度倾角斜率的匀变性、轨迹函数簇的非唯一性、轨迹尺度的相似性、轨迹函数依摩擦系数的分簇性和最速降运动的临界性等性质,研究内容将另文阐述。

参考文献:

- [1] 刘雨龙. 路径对摩擦力做功的影响[J]. 物理与工程, 2004(4): 12 - 13.
- [2] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998: 103.
- [3] 金尚年, 马永利. 理论力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 29.

New Form of Motion Equation and Trace Equation and Their Application in Natural Coordinate System

YU Xiao-ming, SHI You-jin

(Department of Fundamental Science Teaching, Yancheng Institute of Technology, Yancheng Jiangsu 224051, China)

Abstract: In this article, the authors firstly propose the velocity inclination and curvature radius as coordinates in natural coordinate system to obtain a new form of motion equation and trace equation. Furthermore, they discuss the transformation between coordinates in natural coordinate system and those in Cartesian coordinates system. Finally, they show the superiority of trace equation with two typical problems successfully resolved.

Keywords: natural coordinate system; velocity inclination; motion equation; trace equation; transformation; brachistochrone

(责任编辑:张英健)