

# 一类燃烧型的对流扩散方程解的定性性质

温琦慧, 王 燕

(南京财经大学 应用数学学院, 江苏 南京 210023)

**摘要:** 研究具有燃烧型非线性项的反应—对流—扩散方程的自由边界问题, 主要考虑在不同对流强度下解的渐近行为。利用相平面分析的方法对问题的平衡解进行分类, 把对流的强度分成小对流和大对流两种情形。在两种对流强度下, 问题具有完全不同的平衡解分类。对于大对流情形, 构造合适的上解得到解在极限区间  $I_*$  上局部一致收敛于 0; 在小对流情形, 利用  $\omega$ -极限集以及零点性质, 得到解在  $I_*$  上局部一致且收敛于 0 或 1。

**关键词:** 反应—对流—扩散方程; 自由边界; 燃烧型非线性项; 零点性质

**中图分类号:** O175.26; O29 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5322(2021)04-0059-08

非线性扩散方程的自由边界问题一般用来描述生物物种或化学物质的扩张或者传播等现象, 用自由边界表示这种扩张前沿。它常常应用于许多实际问题, 如伤口愈合的过程<sup>[1]</sup>、肿瘤的生长趋势<sup>[2-4]</sup>等。我们比较关注的还是它在生态学领域的应用, 比如新物种的入侵问题, 种群密度的变化过程等。而在自然界的实际情况中, 仅仅

考虑这些个体的随机移动还远远不够, 种群还可能会受到生物或者非生物因素的影响, 如气候、食物或竞争捕食者等, 从而使得种群进行某种偏向性运动。在其相应的数学模型中, 一般用对流项来刻画这种具有方向性的移动。本文受此启发, 考虑如下自由边界问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - au_x + f(u) & g(t) < x < h(t), t > 0 \\ u(t, g(t)) = 0, g'(t) = -\mu u_x(t, g(t)) & t > 0 \\ u(t, h(t)) = 0, h'(t) = -\mu u_x(t, h(t)) & t > 0 \\ -g(0) = h(0) = h_0, u(0, x) = u_0(x) & -h_0 \leq x \leq h_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中  $u(t, x)$  为  $t$  时刻在某点  $x$  处的种群密度;  $u_t$  表示种群根据时间的变化情况;  $f$  是燃烧型非线性

项, 即满足  $f \in C^1([0, \infty))$  且存在  $\theta \in (0, 1)$ , 使得

$$\begin{cases} f(u) = 0 (u \in [0, \theta]), f(u) > 0 (u \in (0, \theta)), f(u) < 0 (u \in (1, \infty)) \\ f(1) = 0, f'(1) < 0, f'_+(\theta) > 0, f(u) \leq f'_+(\theta)(u - \theta) (u \in (\theta, \infty)) \end{cases} \quad (2)$$

两条自由边界  $g(t)$  和  $h(t)$  分别表示种群扩张的前沿, 扩张系数  $\mu (\mu > 0)$  反映种群扩张的能力, 对流系数  $a (a > 0)$  表示对流的强度,  $u_0(x)$  则表示种群的初始密度,  $h_0$  是一个常数。本文我们考虑初值  $u_0(x)$  属于以下集合:

$$\mathfrak{S}(h_0) := \left\{ \phi \in C^2([-h_0, h_0]) \mid \phi(-h_0) = \phi(h_0) = 0, \right. \\ \left. \phi(\cdot) \text{ 在 } (-h_0, h_0) \text{ 上非负, 且恒不等于 } 0 \right\}$$

利用文献[5-6]中的方法, 可以证得如下两个结论:

**引理 1** 设  $f$  满足条件(公式 2),  $u_0 \in \mathfrak{S}(h_0)$ , 则问题(公式 1)存在唯一时间全局解  $(u, g, h)$ , 并且对任意的时间  $T > 0$  和数  $v \in (0, 1)$ , 有

$$u \in C^{(1+\frac{v}{2}, 2+v)}(D_T), g, h \in C^{(1+\frac{v}{2}, 2+v)}([0, T])$$

其中,  $D_T = \{(t, x) \mid 0 < t \leq T, g(t) \leq x \leq h(t)\}$ 。

收稿日期: 2021-11-10

作者简介: 温琦慧(1997—), 女, 浙江湖州人, 硕士生, 主要研究方向为偏微分方程。

引理 2 对任意的  $x \in [g(t), h(t)]$  和  $t > 0$  有

$$0 < u(t, x) \leq C, 0 < -g'(t), h'(t) \leq C$$

其中,  $C > 0$  为常数。

由  $g$  和  $h$  的单调性, 定义

$$g_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} g(t), h_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$$

$$I(t) = [g(t), h(t)], I_\infty = (g_\infty, h_\infty)$$

经过研究, 得到主要结果如下:

定理 1 设  $f$  满足条件(公式 2),  $u_0 = \sigma\phi$ ,  $\phi \in \mathcal{K}(h_0)$ ,  $(u, g, h)$  是问题(公式 1)的解, 则存在  $c_* \in (0, 2\sqrt{f'_+(\theta)})$ , 使得:

(1) 当  $a \in (0, c_*)$  时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \cdot)\|_{I_\infty} = 0 \text{ 或 } 1$$

(2) 当  $a \in (c_*, \infty)$  时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \cdot)\|_{I_\infty} = 0$$

### 1 平衡解分析

先用相平面分析的方法给出方程

$$u_t = u_{xx} - au_x + f(u), t > 0, x \in I \quad (3)$$

的平衡解, 其中  $I \subseteq \mathbb{R}$ 。

利用相平面的方法研究下列方程的所有非负有界解  $v = v(z)$ 。

$$v'' + \gamma v' + f(v) = 0, z \in I \quad (4)$$

其中,  $I \subseteq \mathbb{R}$ 。则当  $\gamma = -a$  时, 方程(4)的解便是方程(3)的平衡解; 当  $\gamma = c - a$  时,  $u(t, x) = v(x - ct)$  是方程(3)的行波解, 其中  $v(\cdot)$  是方程(4)的解。因为问题(1)的解  $u(t, x)$  是非负有界的, 所以这里只需要关注方程(3)的非负有界解。

#### 1.1 相图分析

方程(4)等价于如下二维自治系统:

$$\begin{cases} v' = w \\ w' = -\gamma - f(v) \end{cases} \quad (5)$$

系统(公式 5)的每一个解  $(v(z), w(z))$  对应着相平面  $v - w$  上的一条轨线, 轨线上任意  $w \neq 0$  的点处斜率为

$$\frac{dw}{dv} = -\gamma - \frac{f(v)}{w} \quad (6)$$

由于  $f$  是燃烧型非线性项, 即满足条件(公式 2), 系统(公式 5)在  $v \geq 0$  半平面上的平衡点有  $(0, 0)$ ,  $(q, 0) (0 < q < \theta)$ ,  $(\theta, 0)$  和  $(1, 0)$ 。经过计算可得  $(1, 0)$  所对应的特征值为

$$\lambda_0^\pm = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4f'(1)}}{2}$$

因为  $f'(1) < 0$ , 所以  $(1, 0)$  是鞍点。记系统(公式 5)在第一象限中且满足

$$v(+\infty) = 1, w(+\infty) = 0 \quad (7)$$

的轨线为  $\Gamma_1^\gamma$ , 该轨线上的点记为  $(v, w_1^\gamma(v))$  (见图 1)。记系统(公式 5)在第一象限中且满足

$$v(-\infty) = 0, w(-\infty) = 0 \quad (8)$$

的轨线为  $\Gamma_0^\gamma$ , 该轨线上的点记为  $(v, w_0^\gamma(v))$  (见图 1)。由相平面分析方法, 易知此两条轨线的位置关系, 见图 1。

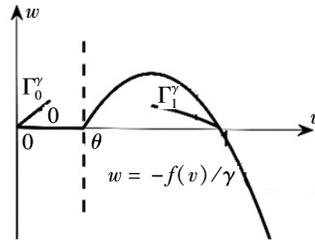


图 1 两条轨线的位置关系

Fig. 1 The position relationship between the two rail lines

下面讨论  $w_1^\gamma(\theta)$  与  $w_0^\gamma(\theta)$  的大小关系。

根据文献[7], 我们有如下结论:

命题 1 存在  $c_0 := 2\sqrt{f'_+(\theta)} > 0$ , 使得当  $\gamma \leq -c_0$  时下述问题存在唯一解  $v(z) = Q_\theta(z)$ 。

$$\begin{cases} v'' + \gamma v' + f(v) = 0, z \in \mathbb{R} \\ v(-\infty) = \theta, v(+\infty) = 1, v(0) = \frac{\theta + 1}{2} \\ v'(z) > 0, \forall z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (9)$$

显然有:

$$\text{推论 1 } w_1^\gamma(\theta) \begin{cases} > 0, -c_0 < \gamma < 0 \\ = 0, \gamma \leq -c_0 \end{cases}$$

下面我们给出  $w_1^\gamma(\theta)$  的具体性质。

引理 3  $w_1^\gamma(\theta)$  关于  $\gamma$  在  $(-c_0, 0)$  上连续且严格递增, 并且

$$\lim_{\gamma \rightarrow (-c_0)^+} w_1^\gamma(\theta) = 0, w_1^0(\theta) = \sqrt{2 \int_\theta^1 f(s) ds} > 0$$

证明: 由常微分方程解对参数的连续依赖性可知,  $w_1^\gamma(\theta)$  关于  $\gamma$  连续。再由式(6)可知

$$\left. \frac{dw_1^\gamma}{dv} \right|_{(1,0)} = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4f'(1)}}{2} < 0$$

则  $\left. \frac{dw_1^\gamma}{dv} \right|_{(1,0)}$  关于  $\gamma \in (-\infty, 0)$  严格单调递减。

从而对任意的  $\gamma_1 < \gamma_2 < 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$w_1^{\gamma_1}(v) < w_1^{\gamma_2}(v), v \in [1 - \delta, 1] \quad (10)$$

下面证明对任意的  $-c_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 0$ , 当  $v \in [\theta, 1 - \delta)$  时,  $w_1^{\gamma_1}(v) \neq w_1^{\gamma_2}(v)$ ; 否则, 假设  $v_0 \in [\theta, 1 - \delta)$ , 使  $w_1^{\gamma_1}(v_0) = w_1^{\gamma_2}(v_0) \neq 0$ , 故

$$\left. \frac{dw_1^\gamma}{dv} \right|_{v=v_0} \leq \left. \frac{dw_1^{\gamma/2}}{dv} \right|_{v=v_0}$$

另一方面, 由公式(6)有

$$\left. \frac{dw_1^{\gamma_1}}{dv} \right|_{v=v_0} = -\gamma_1 - \frac{f(v_0)}{w_1^{\gamma_1}(v_0)} > -\gamma_2 -$$

$$\frac{f(v_0)}{w_1^{\gamma_2}(v_0)} = \left. \frac{dw_1^{\gamma_2}}{dv} \right|_{v=v_0}$$

两者矛盾, 故有  $w_1^{\gamma_1}(\theta) < w_1^{\gamma_2}(\theta)$ , 即  $w_1^\gamma(\theta)$  在  $\gamma \in (-c_0, 0)$  上严格单调递增。由解对参数的连续依赖性 & 推论1可知

$$\lim_{\gamma \rightarrow (-c_0)^+} w_1^\gamma(\theta) = 0$$

设  $\gamma = 0$ , 则在公式(6)两边乘以  $w$ , 再对  $v$  从  $\theta$  到 1 积分, 得

$$w_1^0(\theta) = \sqrt{2 \int_\theta^1 f(s) ds}$$

利用  $w_1^\gamma(\theta)$  和  $w_0^\gamma(\theta)$  的连续单调性, 易知存在唯一的  $\gamma < 0$  使得  $\Gamma_1^\gamma$  和  $\Gamma_0^\gamma$  为同一条轨线。证毕。

**命题2** 存在  $c_* \in (0, c_0)$ , 使得当且仅当  $\gamma = -c_*$  时, 下述问题存在唯一解  $v(z) = Q_0(z)$ 。

$$\begin{cases} v'' + \gamma v' + f(v) = 0, z \in \mathbb{R} \\ v(-\infty) = 0, v(+\infty) = 1, v(0) = \frac{1}{2} \\ v'(z) > 0, \forall z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (11)$$

**证明:** 由公式(6)知, 当  $\gamma < 0, v \in (0, \theta)$  时

$$\frac{dw_0^\gamma}{dv} = -\gamma > 0$$

再由  $w_0^\gamma(\cdot) \in C^1([0, \theta])$ , 知

$$w_0^\gamma(v) = -\gamma v, v \in [0, \theta]$$

结合推论1及引理3, 可知存在  $c_* \in (0, c_0)$ , 当且仅当  $\gamma = -c_*$  时

$$w_0^\gamma(\theta) = w_1^\gamma(\theta)$$

即当且仅当  $\gamma = -c_*$  时, 公式(11)存在解, 又因为(1, 0)是鞍点, 故公式(11)的解唯一, 记为  $v = Q_0(z)$ 。证毕。

这里我们找到了方程(4)的两个关键解  $v = Q_0$  和  $v = Q_0$ , 它们分别对应于相平面上连接奇点  $(\theta, 0)$  和  $(1, 0)$  的轨线  $\Gamma_0^1$ 。借助这两个特殊解, 分析奇点类型和向量场方向, 利用相平面分析法<sup>[8-9]</sup>可以得到  $\gamma \leq 0$  时对应的相图(见图2)。

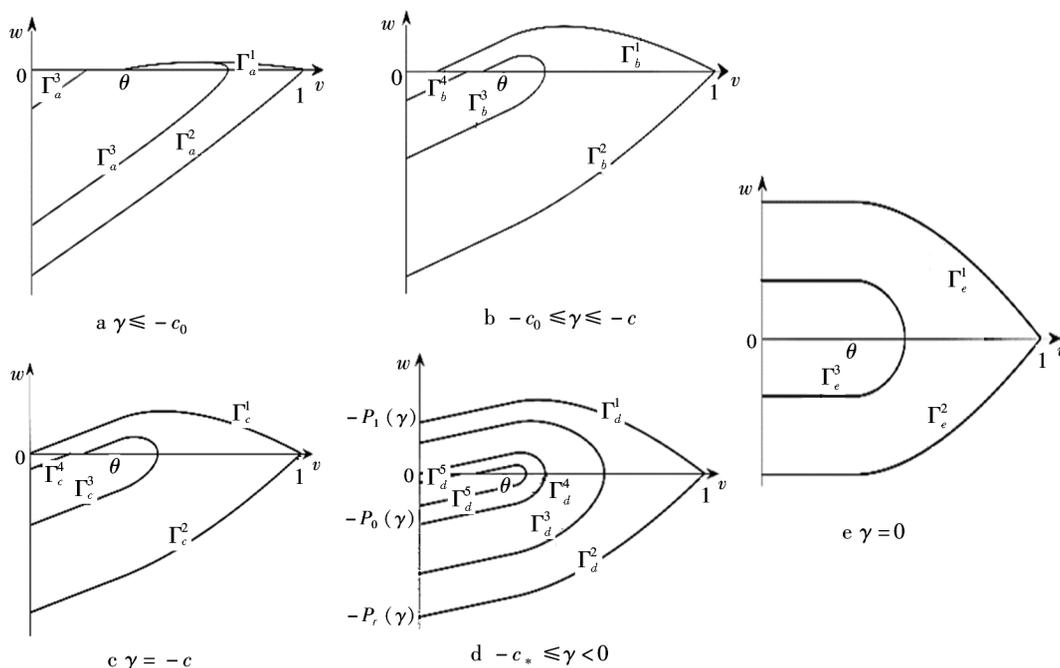


图2  $\gamma \leq 0$  时不同情形下的相图

Fig. 2 Phase diagrams for different cases when  $\gamma \leq 0$

另一方面,当  $\gamma > 0$  时,只要令  $\bar{v}(z) = v(-z)$ , 则当  $v$  是公式(4)的解时有

$$\bar{v}' - \gamma \bar{v}' + f(\bar{v}) = 0, z \in -I$$

再利用上面的分析,可得  $\gamma > 0$  时的相图(见图 3)。

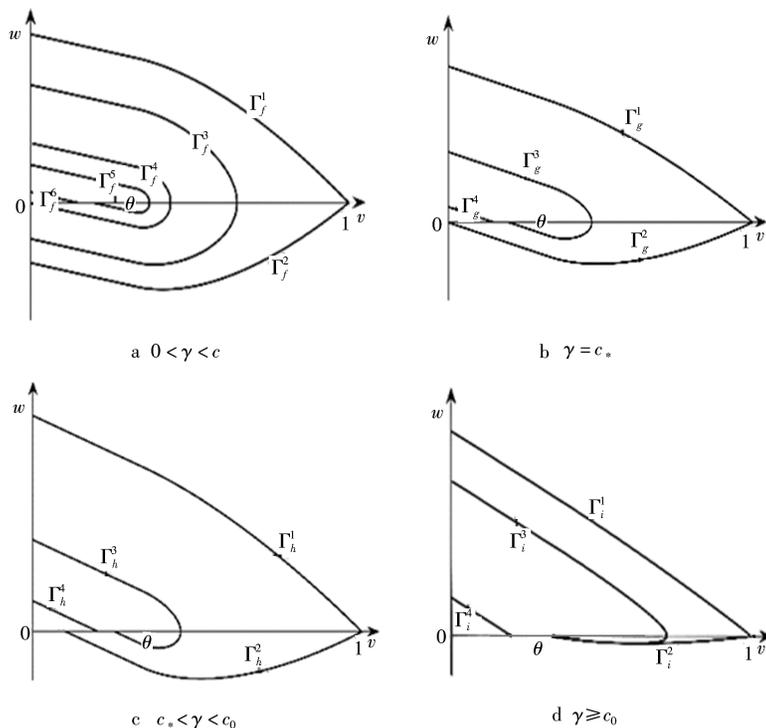


图 3  $\gamma > 0$  时不同情形下的相图

Fig. 3 Phase diagrams for different cases when  $\gamma > 0$

### 1.2 分类结果

有了上面对系统(公式 5)完整的相图分析,易得公式(4)所有解的分类。特别地,当  $\gamma = -a$  时,即为方程(3)的平衡解。

#### 1.2.1 常数解( $a > 0$ )

$$v = m (m \in [0, \theta]), v = 1$$

#### 1.2.2 半轴上严格递减解( $a > 0$ )

$v(\cdot) = U_r(\cdot - x_0) (x_0 \in \mathbb{R})$  (见图 2a 的轨线  $\Gamma_a^2$ 、图 2b 的轨线  $\Gamma_b^2$ 、图 2c 的轨线  $\Gamma_c^2$ 、图 2d 的轨线  $\Gamma_d^2$ ), 其中  $U_r \in C^2(-\infty, 0)$  是方程(4)在  $(-\infty, 0]$  上满足下列条件的唯一解。

$$U_r(-\infty) = 1, U_r(0) = 0, U_r'(\cdot) < 0$$

令

$$P_r(\gamma) = -\mu U_r'(0; \gamma) > 0$$

知  $P_r(\gamma)$  关于  $\gamma$  连续,且在  $(-\infty, c_*)$  上严格递减<sup>[7]</sup>,并满足

$$P_r(c_* - 0) = 0, P_r(-\infty) = +\infty, P_r'(\gamma) < 0$$

#### 1.2.3 半轴上严格递增解( $0 < a < c_*$ )

$v(\cdot) = U_l(\cdot - x_0) (x_0 \in \mathbb{R})$  (见图 2d 的轨线  $\Gamma_d^1$ , 其中  $U_l \in C^2(0, \infty)$  是方程(4)在  $[0, \infty)$  上满足下列条件的唯一解。

$$U_l(0) = 0, U_l(+\infty) = 1, U_l'(\cdot) > 0$$

令

$$P_l(\gamma) = -\mu U_l'(0; \gamma) < 0$$

知  $P_l(\gamma)$  关于  $\gamma$  连续且在  $(-c_*, \infty)$  上严格递减,并满足

$$P_l(-c_* + 0) = 0, P_l(\infty) = -\infty, P_l'(\gamma) < 0$$

由  $U_r$  和  $U_l$  满足的方程及条件可知,当  $\gamma \in (-c_*, \infty)$  时,有

$$U_l'(z; \gamma) = -U_r'(z; -\gamma)$$

$$U_l(z; \gamma) = U_r(z; -\gamma)$$

从而有

$$P_l(\gamma) = -P_r(-\gamma), \gamma \in (-c_*, \infty)$$

#### 1.2.4 半轴上“0-尾巴”的非单调解( $0 < a < c_*$ )

$v(\cdot) = V_0(\cdot - x_0) (x_0 \in \mathbb{R})$  (见图 2d 的轨线

$\Gamma_d^4$ ), 其中  $V_0 \in C^2(-\infty, 0)$  是方程(4)在  $(-\infty, 0]$  上满足下列条件之一的唯一解:

$$V_0(-\infty) = V_0(0) = 0$$

并且  $V_0(\cdot)$  在  $(-\infty, 0)$  上有一个极大值点  $\bar{z}$ ,  $V_0(\bar{z}) > \theta$ 。令

$$P_0(\gamma) = -\mu V_0'(0; \gamma) > 0$$

$P_0(\gamma)$  关于  $\gamma$  在  $(-c_*, 0)$  上连续且严格递减, 且  $P_0(\gamma) \in (0, P_r(\gamma))$ , 并满足

$$P_r(0-0) = 0, P_0(-c_*+0) = P_r(-c_*)$$

### 1.2.5 具有紧支集的解

$v(\cdot) = W_l(\cdot - x_0) (x_0 \in \mathbb{R})$  (见图 2d 的轨线  $\Gamma_d^3$ ), 其中对任意  $b \in (P_0(\gamma), P_r(\gamma))$  都存在唯一的  $L(b, \gamma) > 0$ , 使得  $W \in C^2([-L(b, \gamma), 0])$  是方程(4)在  $(-L(b, \gamma), 0)$  上满足下列条件的唯一解:

$$W(-L(b, \gamma)) = W(0) = 0, b = -\mu W'(0; b, \gamma)$$

即

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (\gamma, b) | -c_* < \gamma < 0 \text{ 时, } P_0(\gamma) < b < P_r(\gamma) \\ 0 \leq \gamma < c_* \text{ 时, } 0 < b < P_r(\gamma) \end{array} \right\}$$

中的每一个点  $(\gamma, b)$  对应某个具有紧支集的解  $W(z; b, \gamma)$ 。

### 1.2.6 $\mathbb{R}$ 上“0-尾巴”的严格递增解 ( $a = c_*$ )

$v(\cdot) = Q_0(\cdot - x_0) (x_0 \in \mathbb{R})$  (见图 2c 的轨线  $\Gamma_c^1$ ), 其中  $Q_0 \in C^2(\mathbb{R})$  是方程(4)在  $\mathbb{R}$  上满足下列条件的唯一解。

$$Q_0(-\infty) = 0, Q_0(+\infty) = 1, Q_0'(\cdot) > 0$$

### 1.2.7 半轴上“ $\alpha$ -尾巴”的非单调解 ( $a > 0$ )

$v(\cdot) = V_\alpha(\cdot - x_0) (x_0 \in \mathbb{R})$  (见图 2a 的轨线  $\Gamma_a^3$ 、图 2b 的轨线  $\Gamma_b^3$ 、图 2c 的轨线  $\Gamma_c^3$ 、图 2d 的轨线  $\Gamma_d^5$ )。该平衡解与 (4) 类似, 左端趋于某个常数  $\alpha \in (0, \theta]$ 。

### 1.2.8 半轴上趋于 $\alpha$ 的严格递减解 ( $a > 0$ )

$v(\cdot) = U_\alpha(\cdot - x_0) (x_0 \in \mathbb{R})$  (见图 2a 轨线  $\Gamma_a^4$ 、图 2b 轨线  $\Gamma_b^4$ 、图 2c 轨线  $\Gamma_c^4$ 、图 2d 轨线  $\Gamma_d^6$ )。  $U_\alpha \in C^2(-\infty, 0)$  是方程(4)在  $(-\infty, 0)$  上满足下列条件的唯一解。

$$U_\alpha(-\infty) = \alpha, U_\alpha(0) = 0, U_\alpha'(\cdot) < 0$$

### 1.2.9 $\mathbb{R}$ 上“ $\alpha$ -尾巴”的严格递增解 ( $c_* < a < c_0$ )

$v(\cdot) = Q_\alpha(\cdot - x_0) (x_0 \in \mathbb{R})$  (见图 2a 的轨线

$\Gamma_a^1$ )。其中  $\alpha \in (0, \theta]$ , 且  $Q_\alpha \in C^2(\mathbb{R})$  是方程(4)在  $\mathbb{R}$  上满足下列条件的唯一解。

$$Q_\alpha(-\infty) = \alpha, Q_\alpha(+\infty) = 0, Q_\alpha'(\cdot) > 0$$

方程(3)的平衡解即为  $\gamma = -a$  时方程(4)的解, 故方程(3)的非负有界平衡解有如下几类:

- (1) 系数  $a \in (0, c_*)$  时, 有类型 1.2.1、1.2.2、1.2.3、1.2.4、1.2.5、1.2.7、1.2.8;
- (2) 系数  $a = c_*$  时, 有类型 1.2.1、1.2.2、1.2.6、1.2.7、1.2.8;
- (3) 系数  $a \in (c_*, \infty)$  时, 有类型 1.2.1、1.2.2、1.2.7、1.2.8、1.2.9。

## 2 解的局部收敛性

类似于文献[8]中引理 2.8 的证明, 可得问题(公式 1)解在左侧的单调性。

**引理 4** 设  $f$  满足条件(公式 2),  $u_0 \in \mathcal{S}(h_0)$ ,  $(u, g, h)$  是问题(公式 1)的解, 则

$$g(t) + h(t) > -2h_0, t > 0$$

$$u_x(t, x) > 0, x \in [g(t), -h_0], t > 0$$

有了解在左侧的单调性, 再利用上下解方法以及零点性质可得如下结论, 即解的局部收敛性。

**定理 2** 设  $f$  满足条件(公式 2),  $u_0 \in \mathcal{S}(h_0)$ ,  $(u, g, h)$  是问题(公式 1)的解, 则

- (1) 当  $a \in (0, c_*)$ ,  $u(t, \cdot)$  在  $I_\infty$  上局部一致收敛到 0 或 1;
- (2) 当  $a \in (c_*, \infty)$ ,  $u(t, \cdot)$  在  $I_\infty$  上局部一致收敛到 0。

特别地, 当  $I_\infty$  是有限区间时,  $u(t, \cdot)$  在  $I_\infty$  上一致收敛到 0。

**证明:** 当  $a \in (c_*, \infty)$  时, 考虑问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - au_x + f(u), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = \bar{u}_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

其中, 当  $x \in [-h_0, h_0]$  时, 有  $\bar{u}_0(x) = u_0(x)$ ; 当  $x \notin [-h_0, h_0]$  时, 有  $\bar{u}_0(x) = 0$ 。

记上述问题的解为  $u_1$ , 则  $u_2(t, x) = u_1(t, x + at)$  满足

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = \bar{u}_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

类似文献[10]中的引理 3.1 的证明, 可证: 存

在  $x_0$  以及常数  $C > 0$ , 使得

$$u_2(t, x) \leq Q_0(x + c_*t + x_0) + Ce^{-\delta t}, x \in \mathbb{R}, t > 0$$

其中,  $Q_0$  为类型(公式 6)平衡解, 故由比较原理可得

$$u(t, x) \leq u_1(t, x) = u_2(t, x - at) \leq Q_0(x - (a - c_*)t + x_0) + Ce^{-\delta t}, x \in I(t), t > 0 \quad (12)$$

又因为当  $-x$  充分大时, 存在  $C_1 > 0$  使  $Q_0(x) \leq C_1 e^{(a-c_*)x}$ 。所以结合公式(12)可知, 对任意的区间  $x \in I_*$ , 当时间  $t$  充分大时, 有

$$u(t, x) \leq C_2 e^{-(a-c_*)^2 t} + Ce^{-\delta t}$$

其中  $C_2$  为依赖于  $x$  的常数, 从而  $u$  在  $I_*$  上局部一致收敛到 0。

下面考虑  $a \in (0, c_*)$  的情况。记  $\omega(u)$  是  $u(t, x)$  在  $L_{loc}^\infty(I_*)$  拓扑意义下的  $\omega$  极限集, 即对任意的稳态解  $w(x) \in \omega(u)$ , 都存在一个序列  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$  使得  $u(t_n, \cdot)$  在  $I_*$  上局部一致收敛于  $w(\cdot)$ 。因为  $\omega(u)$  是紧连通集, 所以选择一个适当的序列  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \rightarrow \infty$ , 可以找到问题(公式 1)这样一个整体解  $W(t, x)$ , 它满足

$$\begin{aligned} W(0, x) &= w(x) \\ u(t + t_n, x) &\rightarrow W(t, x), n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

这个收敛在  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times I_*)$  意义下成立。根据抛物正则性, 它在  $C_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times I_*)$  意义下也成立。下面证明  $w(x)$  是方程(3)的平衡解。由极值原理可知, 对任意的时间  $t \in \mathbb{R}$  和区间  $x \in I_*$ , 要么  $W(t, x) > 0$ , 要么  $W(t, x) = 0$ 。如果  $W(t, x) = 0$ , 显然它是方程(3)的平衡解。现在假设发生  $W(t, x) > 0$  这种情况, 设  $v(x)$  是下面问题的唯一解。

$$\begin{cases} v'' - av' + f(v) = 0, x \in I_* \\ v(0) = w(0), v'(0) = w'(0) \end{cases} \quad (13)$$

根据之前平衡解的分类,  $v(x)$  要么是方程(3)在  $\mathbb{R}$  上的正解, 要么是方程(3)至少拥有一个端点的解。后一种情况也就是存在  $R_0 \in \mathbb{R}$  使得解  $v(R_0) = 0$ 。由零点性质可知, 当  $t$  充分大时, 函数  $u(t, x) - v(x)$  在  $(g(t), h(t))$  上只有简单零点。根据文献[11]中的引理 2.6 知, 对任意的  $t \in \mathbb{R}$  和  $x \in I_*$ , 要么  $W(t, x) - v(x) = 0$ , 要么  $W(t, x) - v(x)$

在  $I_*$  上只有简单零点。而当  $t = 0$  时,  $W(0, x) - v(x) = w(x) - v(x)$  在  $x = 0$  处有退化零点, 并不是只有简单零点, 所以第二种情况不会发生, 则有  $W(0, x) = v(x)$ , 即  $w(x) = v(x)$ , 故  $w(x)$  是方程(3)的平衡解。它包含  $m (m \in [0, \theta]), 1, U_r(x - x_0), U_l(x - x_0), V_0(x - x_0), W(x - x_0), V_\alpha(x - x_0), Q_\alpha(x - x_0)$ , 其中  $x_0 \in \mathbb{R}$ 。如果  $U_r(x - x_0) \in \omega(u)$ , 由  $h(t)$  的单调递增性很容易得出  $h_\infty = x_0$ , 再根据  $\omega(u)$  的连通性知道  $U_r(x - x_0)$  是  $\omega(u)$  中唯一的元素。进一步根据文献[8]中的  $L^p$  估计得出存在  $v \in (0, 1)$ , 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| u(t, \cdot) - U_r(\cdot - x_0) \right\|_{C^{1+\nu}([0, h(t)])} = 0$$

因此当  $t \rightarrow \infty$  时,

$$h'(t) = -\mu u_x(t, h(t)) \rightarrow -\mu U_r'(0) > 0$$

它与  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h_\infty = x_0$  矛盾, 所以假设不成立, 故而  $U_r(x - x_0) \notin \omega(u)$ 。以同样的方法, 可以推出对任意的  $x_0 \in \mathbb{R}, U_l(x - x_0), V_0(x - x_0), W(x - x_0), V_\alpha(x - x_0), Q_\alpha(x - x_0) \notin \omega(u)$ 。

最后我们考虑  $m (0 < m \leq \theta)$  是否属于  $u(t, x)$  的  $\omega$  极限集。假设  $m \in \omega(u)$ , 由  $\omega(u)$  的连通性知道  $\omega(u) = \{m\}$ 。当  $a \in (0, c_*)$  时, 方程(3)有一个“0-尾巴”的非单调解, 即为之前平衡解分类的(4),  $V_0$  在  $(-\infty, 0)$  上有一个极大值点  $\bar{z}$ ,  $V_0(\bar{z}) > \theta$ 。取充分小的  $\varepsilon := \frac{1}{2} [V_0(\bar{z}) - \theta]$ , 由引理 4 中的单调性结论可知存在充分大的  $T > 0$ , 当  $t > T$  时, 有

$$u(t, x) \leq \theta + \varepsilon, x \in [g(t), -h_0]$$

考虑区间  $[g(t), g(T)]$ , 取平衡解  $V_0(\cdot)$  的某个截断  $V_0(x - g(T) + \bar{z})|_{x \leq g(T)}$  作为上解。因为  $V_0(x - g(T) + \bar{z})|_{x \leq g(T)}$  在  $(-\infty, g(T))$  上单调递增且  $V_0(\bar{z}) > \theta \geq m, V_0(-\infty) = 0$ , 所以存在  $x_0 \leq g(T)$  使得  $V_0(x_0 - g(T) + \bar{z}) = \frac{m}{2}$ 。再根据比较原理以及自由边界  $g(t)$  的单调性可知, 存在时间  $T_1 > T$  使得  $g(T_1) < x_0$ , 且对任意的  $t > T_1$  都有  $u(t, x_0) \leq V_0(x_0 - g(T) + \bar{z}) = \frac{m}{2}$ , 与假设矛盾。因此当  $a \in (0, c_*)$  时,  $u(t, x)$  的  $\omega$  极限集中的元素只

能是0或1。

最后分析当  $I_\infty$  是有限区间时的情况。我们在区域

$$G = \left\{ (t, x) \mid t > 0, h(t) - \frac{1}{M} < x < h(t) \right\}$$

上考虑函数

$$w(t, x) = C \left[ 2M(h(t) - x) - M^2(h(t) - x)^2 \right], (t, x) \in G$$

其中  $M$  时待定的正常数,  $C$  是式子中的正常数。通过计算可得

$$w_t = 2MCh'(t)[1 - M(h(t) - x)]$$

$$w_x = C[-2M + 2M^2(h(t) - x)], w_{xx} = -2M^2C$$

这里取

$$M = \max_{0 \leq w \leq c} \left\{ \frac{4\|u_0\|_{C^1([-h_0, h_0])}}{3C}, \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{f(w)}{2C}} \right\}$$

整理后有

$$w_t - w_{xx} + aw_x - f(w) \geq 2M^2C - 2MCa - f(w) =$$

$$2C \left( M - \frac{a}{2} \right)^2 - \left( \frac{a^2C}{2} + f(w) \right) \geq 0$$

又由  $w$  的定义得

$$\begin{cases} w\left(t, h(t) - \frac{1}{M}\right) = C \geq u\left(t, h(t) - \frac{1}{M}\right) \\ w(t, h(t)) = 0 = u(t, h(t)) \end{cases}$$

下面我们考虑  $w(0, x)$  和  $u_0(x)$  的大小关系。

已知

$$w(0, x) = C \left[ 2M(h_0 - x) - M^2(h_0 - x)^2 \right]$$

当  $x \in \left[ h_0 - \frac{1}{M}, h_0 - \frac{1}{2M} \right]$  时, 有

$$w(0, x) \geq \frac{3}{4}C, -2M \leq \frac{1}{x - h_0} \leq -M$$

再由

$$u_0'(\xi) = \frac{u_0(x) - u_0(h_0)}{x - h_0} \leq -M(u_0(x) - u_0(h_0))$$

$\xi$  介于  $x$  和  $h_0$  之间, 得

$$\frac{u_0(x) - u_0(h_0)}{1/M} \leq -u_0'(\xi) \leq \|u_0\|_{C^1([-h_0, h_0])}$$

因为  $M \geq \frac{4\|u_0\|_{C^1([-h_0, h_0])}}{3C}$ , 故有  $u_0(x) \leq \frac{3}{4}C$ ,

所以当  $x \in \left[ h_0 - \frac{1}{M}, h_0 - \frac{1}{2M} \right]$  时, 有  $u_0(x) \leq$

$w(0, x)$ 。

当  $x \in \left[ h_0 - \frac{1}{2M}, h_0 \right]$  时,

$$\begin{cases} w_x(0, x) = C[-2M + 2M^2(h_0 - x)] \leq -CM \leq \\ -\frac{4}{3}\|u_0\|_{C^1([-h_0, h_0])} \leq u_0'(x) \\ w(0, h_0) = u_0(h_0) = 0 \end{cases}$$

由此得  $w(0, x) \geq u_0(x)$ 。

综合这两种情况, 可以知道当  $x \in \left[ h_0 - \frac{1}{2M}, h_0 \right]$  时, 有  $w(0, x) \geq u_0(x)$ 。在区域  $G$  上对  $w - u$  运用比较原理, 得到  $u(t, x) \leq w(t, x)$ 。任意取  $\varepsilon > 0, \delta = \min\left\{ \frac{1}{M}, \frac{\varepsilon}{4MC} \right\}$ , 存在  $T_0 > 0$  使得当  $t > T_0$  时, 有

$$h_\infty - \frac{1}{M} \leq h_\infty - \delta < h(t) < h_\infty$$

故对任意的  $t > T_0, x \in [h_\infty - \delta, h(t)]$  时, 有

$$\begin{aligned} u(t, x) &\leq w(t, x) \leq w(t, h_\infty - \delta) \leq \\ w(t, h(t) - \delta) &= C(2M\delta - M^2\delta^2) < \varepsilon \end{aligned}$$

同理可以找到  $T_1 > 0$ , 使得  $t > T_1, x \in [g(t), g_\infty + \delta]$  时  $u(t, x) < \varepsilon$ 。再由  $u$  在  $I_\infty$  上的局部收敛性知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \cdot)\|_{C^2(U(t))} = 0$$

即  $u(t, \cdot)$  在  $I_\infty$  上一致收敛于0。证毕。

### 3 结论

本文讨论了一类具有燃烧型非线性项的对流扩散方程, 主要研究了在不同对流强度下解的渐近行为。对流项在生物学上具体表现在种群受到生物或者非生物因素比如气候的变化、食物的缺失等的影响, 使得种群进行某种偏向性的运动。研究表明, 当对流强度很大时, 即  $a > c_*$ , 解在极限区间上局部一致收敛于0, 也就是种群在强对流环境下不能在固定区域上存活, 要么种群整体迁移并存活, 要么迁移的同时消逝。而当对流强度比较小时, 即  $a \in (0, c_*)$ , 解在极限区间上局部一致收敛于0或1, 也就是种群在弱对流环境下有在固定区域上存活的可能性, 有可能成功扩散存活下去, 也有可能消逝。

## 参考文献:

- [1] COLANGELO M T, BELLETTI S, GOVONI P, et al. A biomimetic polynucleotides-hyaluronic acid hydrogel promotes wound healing in a primary gingival fibroblast model[J]. *Applied Sciences*, 2021, 11(10): 4405
- [2] COLLI P, SIGNORI A, SPREKELS J. Correction to: optimal control of a phase field system modelling tumor growth with chemotaxis and singular potentials[J]. *Applied Mathematics & Optimization*, 2021, 84(3): 3569-3570.
- [3] IPOCOANA E. On a non-isothermal Cahn-Hilliard model for tumor growth[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2022, 506(2): 125665.
- [4] INTERIAN R, RODRÍGUEZ-RAMOS R, VALDÉS-RAVELO F, et al. Tumor growth modelling by cellular automata[J]. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, 2017, 5(3/4): 239-259.
- [5] DU Y H, LIN Z G. Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2010, 42(1): 377-405.
- [6] DU Y H, LOU B D. Spreading and vanishing in nonlinear diffusion problems with free boundaries[J]. *Journal of the European Mathematical Society*, 2015, 17(10): 2673-2724.
- [7] GU H, LOU B D. Spreading in advective environment modeled by a reaction diffusion equation with free boundaries[J]. *Journal of Differential Equations*, 2016, 260(5): 3991-4015.
- [8] ARONSON D G, WEINBERGER H F. Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation[C]//*Partial Differential Equations and Related Topics*, 1975:446-549. DOI:10.1007/BFb0070595.
- [9] ARONSON D G, WEINBERGER H F. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics[J]. *Advances in Mathematics*, 1978, 30(1): 33-76.
- [10] FIFE P C, MCLEOD J B. The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1977, 65(4): 335-361.
- [11] DU Y H, MATANO H. Convergence and sharp thresholds for propagation in nonlinear diffusion problems[J]. *Journal of the European Mathematical Society*, 2010: 279-312

## Qualitative Properties of Solutions for a Class of Combustion Convection Diffusion Equations

WEN Qihui, WANG Yan

(School of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance & Economics, Nanjing Jiangsu 210023, China)

**Abstract:** In this paper, the free boundary of reactive-convection-diffusion equations with combustion nonlinear terms is studied, and the approaching behavior of solution under different convective intensity is mainly considered. We use phase plane analysis to classify the balance solution of the problem and divide the strength of convection into two situations: small convection and large convection. At these two convection intensity, the problem has a completely different balanced classification. For large convection situations, we construct a suitable upper solution on the limit range of  $I_\infty$  locally consistent convergence to 0. In a small convection situation, we use the  $\omega$ -limit set and zero-point nature to get the solution on the  $I_\infty$  locally consistent convergence at 0 or 1.

**Keywords:** reaction-convection-diffusion equation; free boundary; combustion type nonlinear term; zero point property

(责任编辑:张英健)