

doi:10.16018/j.cnki.cn32-1650/n.202104004

## 无记忆非线性系统参数估计及空间位置辨识仿真分析

徐 飞, 胡学敏

(盐城工学院 汽车工程学院, 江苏 盐城 224051)

**摘要:**以无记忆非线性系统为研究对象,将非线性响应力作为外部载荷,将其与外力和响应位移一起构成多输入单输出系统;然后给出适用于空间任意位置的非线性单元参数估计方法;最后基于“反向路径法”和重相干函数给出利用随机激励和响应信号辨识非线性单元空间位置的方法,并通过两个仿真案例进行验证。结果表明,非线性单元参数估计方法可准确计算非线性系统的强迫响应,并实现非线性单元空间位置的准确辨识和参数的准确估计。

**关键词:**非线性系统;强迫响应;空间位置辨识;参数估计

**中图分类号:**TP391.9   **文献标志码:**A   **文章编号:**1671-5322(2021)04-0017-07

在研究结构的动力学特性时,若系统中存在显著的非线性,需要一套非线性方法进行动力系统的辨识和分析。目前存在的大部分非线性分析方法在对非线性系统进行参数估计和建模前通常需要事先知道系统中非线性单元的空间位置和类型。针对非线性单元空间的位置辨识和非线性类型辨识,学者们提出了众多的方法。Wardle等<sup>[1]</sup>提出了一阶频响函数(Frequency Response Function, FRF)法,利用频率递增的正弦信号对系统施加激励,再利用系统在该频率下的响应对非线性系统进行辨识;Storer等<sup>[2]</sup>将一阶FRF法推广到高阶,高阶FRF法除了能够利用频率递增的正弦信号对系统施加激励,再利用系统在该输入信号下的响应对非线性系统进行辨识,还能对高阶谐波进行追踪(一阶FRF不会)。

在非线性动力学系统参数估计方面,学术界自20世纪70年代以来已经开展大量的研究工作,并从不同角度提出多种估计方法<sup>[3-6]</sup>,主要包括线性等效法、时域法、黑盒法、频域法、时-频域转换法、非线性模态法以及非线性模型修正法。在频域法中,有一种基于高斯随机激励的频域估计法——反向路径(Reverse Path, RP)法,首先由Taam<sup>[7]</sup>提出,并用于单自由度系统频域的非线性

辨识,随后Rice等<sup>[8]</sup>将其扩展到多自由度系统。反向路径法要求激励点必须是非线性单元对应的位置节点。在进行非线性参数估计时反向路径法将线性位移和非线性位移作为系统的输入,施加的外力作为输出,构造一个多输入单输出的系统,并由相干函数判断构造出的非线性模型的准确性。为解决该方法要求激励点必须是非线性单元对应的位置节点问题,Richards等<sup>[9]</sup>提出了条件反向路径法(Conditioned Reverse Path, CRP)。该方法基于谱调制技术将系统输入输出的非线性部分与线性部分分离,从而在频域构造出不相关的响应分量,但公式复杂、计算效率较低。为简化计算、提高计算效率,Adams等<sup>[10]</sup>提出了基于输出反馈的非线性辨识法(Nonlinear Identification Through Feedback of the Outputs, NIFO)。针对噪声对该方法中频率响应函数的 $H_2$ 估计误差的影响,Haroon等<sup>[11]</sup>提出了修正后的 $H_2$ 估计,从而改善非线性参数估计的精度问题。对应于频域中的CRP方法,Muhamad等<sup>[12]</sup>提出了时域中的正交化RP方法(Orthogonalized Reverse Path, ORP),该方法通过在时域去除非线性效应来辨识隐含的线性系统。Magnevall等<sup>[13]</sup>在假设非线性单元空间位置为已知的情况下提出了更加通用

收稿日期:2021-09-06

基金项目:国家自然科学基金资助项目(52102443)。

作者简介:徐飞(1987—),男,江苏盐城人,讲师,博士,主要研究方向为非线性结构动力学、超高斯随机振动、振动可靠性与疲劳寿命评估。

的 RP 方法,该方法只需要单个宽带随机激励,就解决了输入信号的相关性和计算效率问题。针对 NIFO 方法中非线性参数估计和频响函数估计在共振点附近精度较差的问题, Marchesiello 等<sup>[14]</sup>提出了另一种时域非线性子空间辨识法(Nonlinear Subspace Identification, NSI)。ZHANG 等<sup>[15]</sup>提出基于随机子空间算法的两阶段时域非线性辨识法,该方法通过测试两阶段不同幅值激励下的响应分别完成系统线性部分和非线性部分的辨识,在噪音干扰环境下比单阶段辨识法更加准确、可靠。

上述文献中, Magnevall 等给出的局部无记忆非线性单元的参数估计方法只适用于非线性作用于自由度和地之间的情况,当非线性作用于自由度之间时将引入较大误差。本文对该方法进行了改进,使其适用于空间任何位置的非线性单元参数估计,并基于 RP 法和重相干函数(Multiple Coherence Function, MCF)给出了非线性单元空间位置的辨识方法,最后利用两个仿真案例对上述方法进行验证。

## 1 理论建模

### 1.1 非线性参数估计

任意一个多自由度非线性动力学系统的运动方程可表示为:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$  分别为系统的质量、阻尼和刚度的矩阵;  $\mathbf{x}(t)$  为响应位移;  $\mathbf{f}(t)$  为输入力;  $\mathbf{A}(t) = \sum_{m=1}^L P_m \mathbf{W}_m y_m(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t))$  为非线性力,其中  $P_m$  为第  $m$  个非线性单元的参数,  $\mathbf{W}_m$  为第  $m$  个非线性单元的空间位置向量,  $y_m$  为第  $m$  个非线性单元的非线性函数,  $L$  为非线性单元的个数。

本文考虑的非线性单元为局部无记忆单元,此时任何一个非线性响应力可用一组多项式之和表示。当非线性单元处于自由度  $k$  和地之间时,非线性响应力可表示为:

$$g_k(t) = \{\mathbf{P}\}^T \times \{\mathbf{z}(t)\}_k = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_{Q-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^2(t) \\ x_k^3(t) \\ \vdots \\ x_k^Q(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{P}$  表示行向量,  $\mathbf{z}(t)$  表示列向量,  $P_u$  表示第  $u$  个非线性单元的参数,  $x_k(t)$  表示自由度为  $k$  的位移,  $Q$  表示多项式的最高阶数。

公式(2)中的每一项  $x_k^i(t)$  表示一个非线性单元  $y_m$ , 即

$$y_m = x_k^i(t), i = 2, 3, \dots, Q, k = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

式中  $N$  为系统自由度。

当非线性单元处于自由度  $r$  和自由度  $s$  之间时,非线性响应力可表示为:

$$g_{r,s}(t) = \{\mathbf{P}\}^T \times \{\mathbf{z}(t)\}_{r,s} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_{Q-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_r(t) - x_s(t))^2 \\ (x_r(t) - x_s(t))^3 \\ \vdots \\ (x_r(t) - x_s(t))^Q \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中每一个多次方项  $(x_r(t) - x_s(t))^i$  表示一个非线性单元  $y_m$ , 即

$$y_m = (x_r(t) - x_s(t))^i, i = 2, 3, \dots, Q; r, s = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

由上述分析可知,若每一个非线性力等于  $Q - 1$  个多项式之和,则当系统中有  $D(D \geq 1)$  个非线性力时,非线性单元  $y_m$  的个数  $L$  为:

$$(Q - 1) \leq L \leq D \times (Q - 1) \quad (6)$$

对公式(1)进行傅里叶变换,并两边同乘以 FRF 矩阵,得:

$$\mathbf{X}(w) + \mathbf{H}(w) \sum_{m=1}^L P_m \mathbf{W}_m Y_m(w) = \mathbf{H}(w) \mathbf{F}(w) \quad (7)$$

式中:  $\mathbf{X}(w)$  为位移的傅里叶变换,  $\mathbf{H}(w)$  为 FRF 矩阵,  $Y_m(w)$  为非线性函数的傅里叶变换,  $\mathbf{F}(w)$  为力函数的傅里叶变换。

实际试验中激励力在系统共振点处会发生“卸力”(drop out)现象,因此很容易受到噪声的影响。假设输入力作用在自由度  $q$ , 对于每一个响应自由度  $i$ , 公式(7)可以变为:

$$\mathbf{B}_i \times \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i(w) \\ \{\mathbf{Z}\}_m \end{bmatrix} + K_q(w) = F_q(w) \quad (8)$$

式中:  $K_q(w)$  为输入力通道的噪声;  $\mathbf{B}_i$  为频响函数矩阵的逆矩阵,且

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} 1 & \frac{H_{i,:}(w) P_1(w) \mathbf{W}_1}{H_{i,q}(w)} & \dots & \frac{H_{i,:}(w) P_M(w) \mathbf{W}_M}{H_{i,q}(w)} \\ \frac{H_{i,q}(w)}{H_{i,q}(w)} & & & \end{pmatrix};$$

$$\{Z\}_m = \begin{bmatrix} Y_1(w) \\ \vdots \\ Y_M(w) \end{bmatrix}$$

公式(8)表示一个多输入单输出系统。现假设第  $m$  个非线性单元是一个三次方硬弹簧,作用于自由度  $j$  和  $j + 1$  之间,则该非线性弹簧的空间位置向量为:

$$W_m = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T \quad (9)$$

式中:1对应自由度  $j$ , -1对应自由度  $j + 1$ 。

该非线性弹簧在频域内可表示为:

$$Y_m(w) = F((W_m^T x)^3) = F((x_j - x_{j+1})^3) \quad (10)$$

其中,  $F(\bullet)$  表示傅里叶变换。

在式(8)中,取  $B_i$  中的第  $m + 1$  项,结合式(9),有

$$B_i^{m+1} = \frac{H_{i,\cdot}(w) P_m(w) W_m}{H_{i,q}(w)} = P_m(w) \frac{(H_{i,j}(w) - H_{i,j+1}(w))}{H_{i,q}(w)} \quad (11)$$

当  $j$  和  $j + 1$  不等于  $q$  时,  $H_{i,j}$  和  $H_{i,j+1}$  均未知,此时令  $i=q$ ,利用 FRF 的互易性得到  $H_{i,j}$  和  $H_{i,j+1}$ ,从而估计非线性参数  $P_m$ ,即

$$B_q^{m+1} = P_m(w) \frac{(H_{q,j}(w) - H_{q,j+1}(w))}{H_{q,q}(w)} = P_m(w) \frac{(H_{j,q}(w) - H_{j+1,q}(w))}{H_{q,q}(w)} \quad (12)$$

$$H_{q,q}(w) = 1/B_q^1(w) \quad (13)$$

$$H_{j,q}(w) = W_m^j (1/B_j^1(w)) \quad (14)$$

$$-H_{j+1,q}(w) = W_m^{j+1} (1/B_{j+1}^1(w)) \quad (15)$$

结合公式(12)~(15),得:

$$P_m(w) = \frac{B_q^{m+1}(w)}{B_q^1(w)} \frac{1}{(W_m^j (1/B_j^1(w)) + W_m^{j+1} (1/B_{j+1}^1(w)))} \quad (16)$$

该公式适用于非线性单元作用于自由度和地之间或作用于两个自由度之间。

### 1.2 非线性空间位置辨识

利用 MCF 对非线性空间位置进行探测。假设非线性作用于自由度  $m$  和地之间,激励点为  $q$ ,响应点为  $n$ ,利用  $Q$  次方的多项式对非线性进行

模拟,有:

$$B_n = [G_{FX}]_{n,m} \times [G_{XX}]_{n,m}^{-1} \quad (17)$$

式中:  $[G_{FX}]_{n,m}$  为输出与所有输入的互谱密度矩阵,  $[G_{XX}]_{n,m}$  为所有输入的自谱密度矩阵。

MCF 可被用来检验构造出来的非线性模型的准确性。

$$\gamma_{n,m}^2 = \frac{[G_{FX}]_{n,m} \times [G_{XX}]_{n,m}^{-1} \times [G_{FX}]_{n,m}^H}{G_{FF}} \quad (18)$$

式中  $\gamma_{n,m}^2$  值表明测得的输出有多少是由输入引起的。该值取决于初始假设的非线性函数的形式及其位置是否足够接近真实情况,初始假设的非线性函数越接近真实情况,  $\gamma_{n,m}^2$  越接近 1。

令  $n$  和  $m$  分别从 1 循环到  $N$ ,形成  $N \times N$  种组合,计算每种组合下的  $\gamma_{n,m}^2$ ,再利用测得的输入力的均方根值与相关输出的均方根值之差构造评判准则,以确定非线性单元的空间位置,从而有:

$$R_{n,m} = 1 / \left( \sqrt{\Delta f \sum_{f_1}^{f_2} G_{FF}} - \sqrt{\Delta f \sum_{f_1}^{f_2} \gamma_{n,m}^2 \times G_{FF}} \right) \quad (19)$$

式中:  $R_{n,m}$  为非线性单元的空间位置;  $G_{FF}$  表示输入力的功率谱密度,  $m^2/s^3$ ;  $\Delta f$  表示频率间隔, Hz;  $f_1, f_2$  分别表示频率下限与上限, Hz。

式(19)中  $R_{n,m}$  取得最大值时,即可判定该点存在非线性单元,且非线性单元空间位置即为  $R_{n,m}$  的最大值点。

## 2 仿真案例

### 2.1 案例 1:非线性系统强迫响应计算

以一个 4 自由度非线性系统为例,假设该系统中隐含的线性系统的参数为已知,如图 1 所示。系统中存在 2 个三次方硬弹簧非线性单元,第一个硬弹簧位于自由度 1 和地之间,非线性系数  $p_1 = 1.7 \times 10^{15}$ ;第二个硬弹簧位于自由度 2 和自由度 3 之间,非线性系数  $p_2 = 5 \times 10^{15}$ 。现对自由度 4 施加频率为 0~80 Hz 的随机振动力,利用斜阶跃响应不变数字滤波器法计算 4 个自由度的强迫响应,再由强迫响应和 RP 方法提取系统隐含的线性 FRF ( $H_{14}, H_{24}, H_{34}, H_{44}$ ),如图 2 所示,采样频率为 800 Hz;利用 Welch 方法计算输入输出随机振动信号的功率谱密度,并基于 RP 方法根据式(16)进行非线性参数估计,最后与理论值进行对比,结果如图 3 所示。

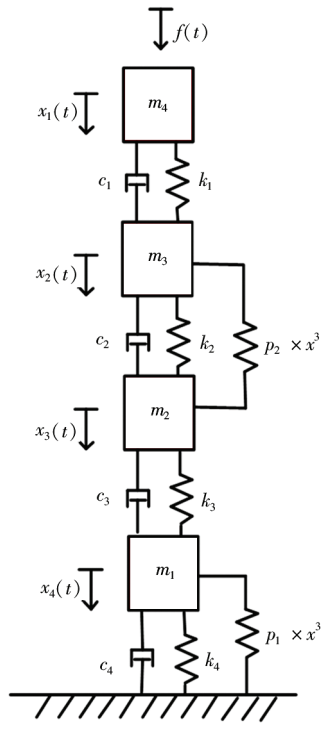


图 1 多自由度非线性系统  
Fig 1 MDOF nonlinear system

图 2 为系统隐含的线性 FRF、由输入输出信号直接估计的线性 FRF 和由 RP 方法拟合得到的线性 FRF 曲线。由图 2 可以看出,由输入输出信号直接估计的线性 FRF 明显偏离系统隐含的线性 FRF。由于非线性的存在,直接估计的线性 FRF 的共振频率点高于系统隐含的线性 FRF 的共振频率点。

由图 2 还可以看出,由 RP 方法得到的线性系统 FRF 与系统隐含的线性 FRF 完全吻合。因此,利用 RP 方法可准确得到线性系统的 FRF。

图 3 对比了非线性参数的理论值和预计值。由图 3 可以看出,本文给出的方法可准确估计非线性参数,不管非线性作用于自由度和地之间还是作用于自由度之间。

图 4 对比了系统的相干函数和重相干函数。由图 4 可以看出,相干函数在大部分频率点上偏离 1,意味着若将非线性系统线性化,系统的输出无法完全由输入解释;重相干函数在整个频率范围内均接近 1,证明系统的输出是由线性输入和非线性输入共同决定的,同时证明本文给出的方法可以准确预计系统的非线性响应。

2.2 案例 2:非线性单元空间位置辨识

图 5 为一个 4 自由度的非线性系统,其理论的非线性系数  $p=1.7 \times 10^{15}$ 。利用该系统生成一组

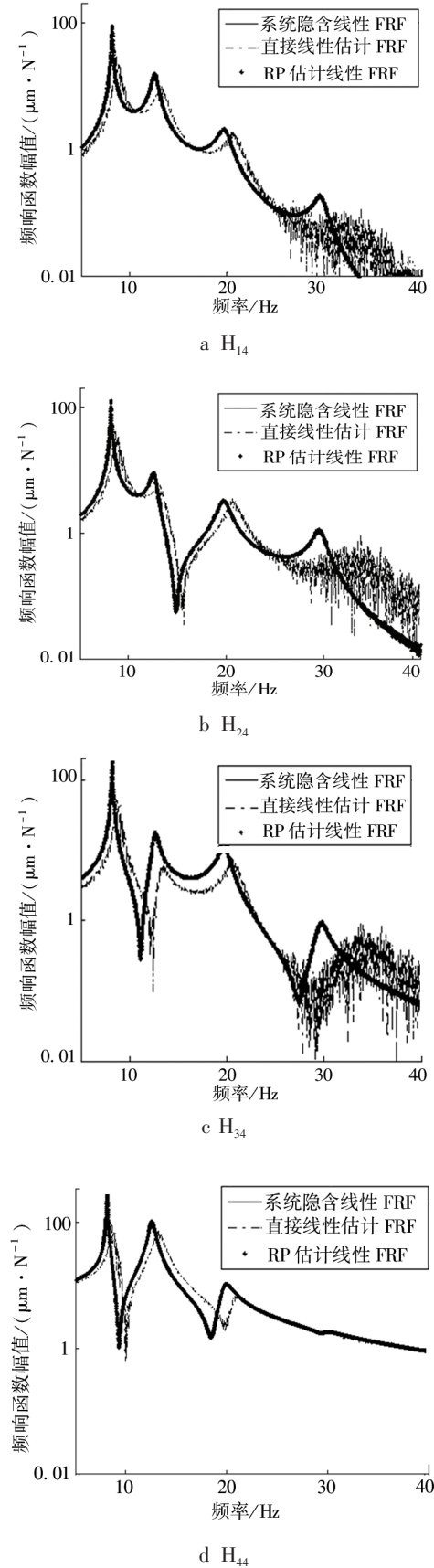


图 2 隐含的线性系统频响函数  
Fig 2 FRF of underlying linear system

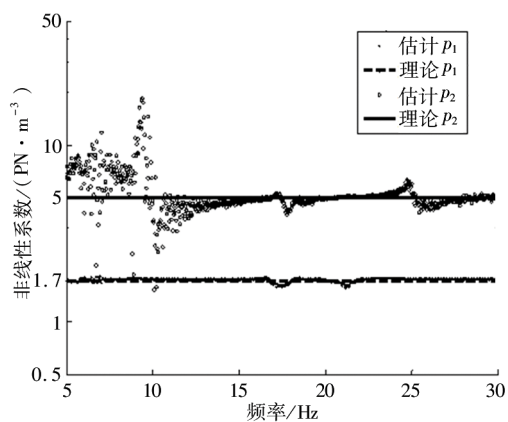


图3 非线性参数估计

Fig 3 Estimation of nonlinear parameters

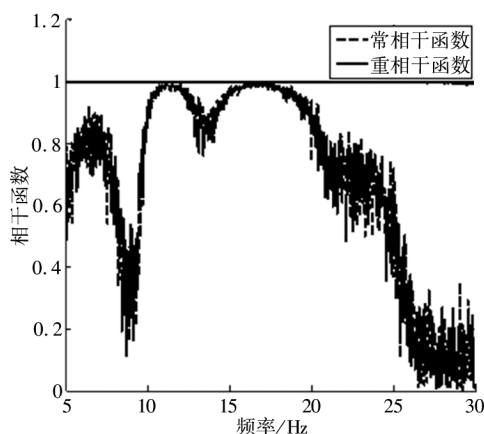


图4 相干函数

Fig 4 Coherence function

仿真数据,然后在自由度为4的激励点施加频率为0~80 Hz的随机振动力,作为激励信号;再在激励力中加入10%激励力的均方根值的噪声以模拟试验环境,同时设定采样频率为800 Hz,检测响应点为所有自由度处的随机位移,并利用这一组数据对非线性空间位置及其参数进行辨识。

当激励点和响应点均为自由度4时,系统的相干函数如图6所示。从图6可以看出,在首阶共振频率处相干函数远小于1,表明系统中存在显著的非线性。

利用公式(19)对非线性空间的位置进行辨识,结果如图7所示。由图7可以看出,本文的方法可准确判断非线性空间的位置。

为了判断非线性函数类型,对自由度4重新施加0~15 Hz的窄带随机力,得到图8所示的相干函数。从图8可以看出,在3倍的谐波频率处,相干函数远小于1,表明系统中存在三次方非线性项。由于已经辨识出非线性作用于自由度2和地

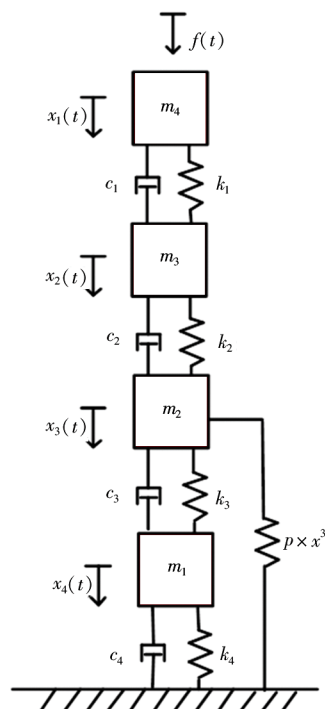


图5 Duffing多自由度系统

Fig 5 Duffing MDOF system

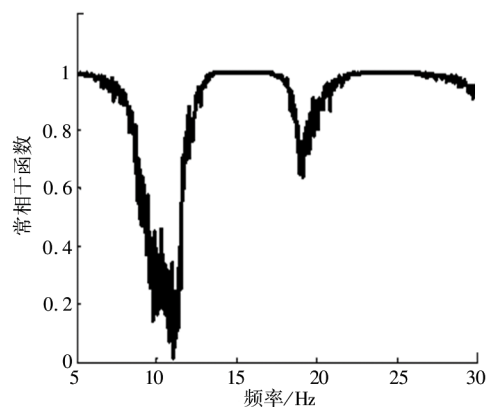


图6 相干函数

Fig 6 Coherence function

之间,因此初步假设非线性函数为:

$$y_m = x_2^3(t) \tag{20}$$

在自由度为4的激励点施加频率为0~80 Hz的随机振动力时,非线性函数的相干函数和重相干函数如图9所示。为了进行对比,图9还给出了非线性函数为其他形式的重相干函数结果。从图9可以看出,公式(20)是对假设非线性函数的最逼近表达,此时的重相干函数在整个频率范围内最接近1。

最后利用公式(15)对非线性参数进行估计,结果如图10所示。从图10可以看出,非线性参

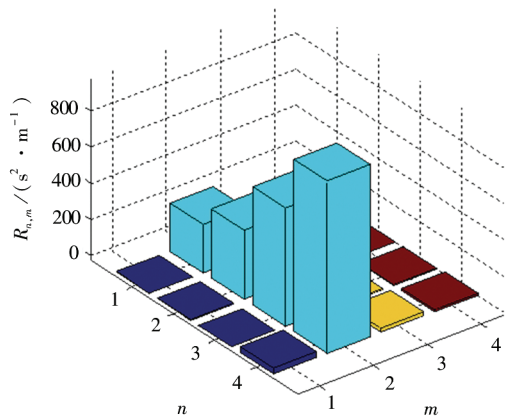


图 7 非线性单元空间位置辨识

Fig 7 Spatial location identification of nonlinear element

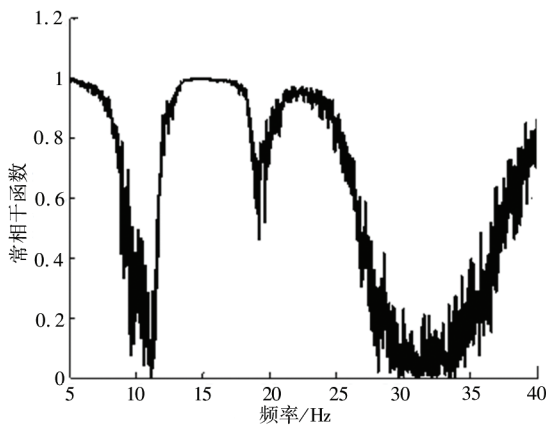


图 8 窄带激励下的相干函数

Fig 8 Coherence function under narrow-band excitation

数的辨识结果与其理论值一致。

### 3 结论和展望

本文给出了适用于工程实践的非线性参数估计方法,即对现有非线性参数估计公式进行修正,使其适用于更一般的情况。此外,基于“反向

#### 参考文献:

[1] WARDLE R, WORDEN K, KING N E. Classification of nonlinearities using neural networks[J]. Proceedings of SPIE, 1997, 3089: 980-986.

[2] STORER D M, TOMLINSON G R. Recent developments in the measurement and interpretation of higher order transfer functions from non-linear structures[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 1993, 7(2): 173-189.

[3] NOËL J P, KERSCHEN G. Nonlinear system identification in structural dynamics: 10 more years of progress[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 83: 2-35.

[4] FELDMAN M. Hilbert transform methods for nonparametric identification of nonlinear time varying vibration systems[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2014, 47(1/2): 66-77.

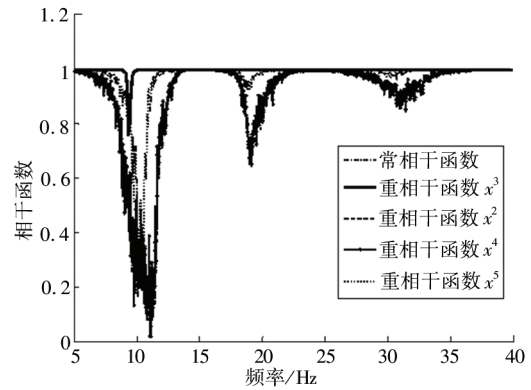


图 9 不同非线性函数下的相干函数

Fig 9 Coherence function with different nonlinear function

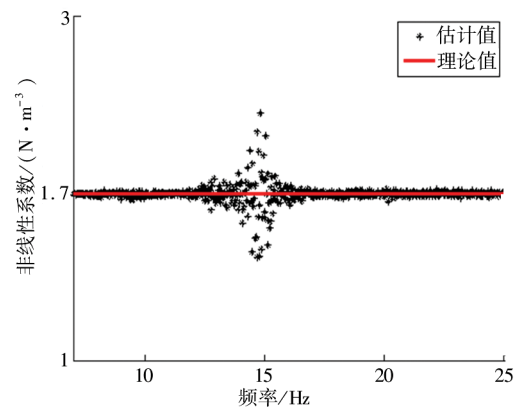


图 10 非线性参数估计

Fig 10 Estimation of nonlinear parameters

路径法”和重相干函数,给出了非线性作用于自由度和地之间的的空间位置辨识,即利用随机激励和响应信号辨识非线性空间位置。该方法同样适用于非线性作用于自由度之间,只是当系统自由度很多时,需要计算多种组合下的重相干函数来辨识空间位置。因此,下一步的研究任务是如何缩减搜索空间,将该方法推广到更一般的非线性系统。

- [5] SCHOUKENS J, VAES M, PINTELON R. Linear system identification in a nonlinear setting: nonparametric analysis of the nonlinear distortions and their impact on the best linear approximation[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2016, 36(3): 38-69.
- [6] WEI S, PENG Z K, DONG X J, et al. A nonlinear subspace-prediction error method for identification of nonlinear vibrating structures[J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 91(3): 1605-1617.
- [7] TAAM W. Nonlinear system analysis and identification from random data[J]. Technometrics, 1991, 33(4): 482-483.
- [8] RICE H J, FITZPATRICK J A. A procedure for the identification of linear and non-linear multi-degree-of-freedom systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 149(3): 397-411.
- [9] RICHARDS C M, SINGH R. Identification of multi-degree-of-freedom non-linear systems under random excitations by the “reverse path” spectral method[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 213(4): 673-708.
- [10] ADAMS D E, ALLEMANG R J. A frequency domain method for estimating the parameters of a non-linear structural dynamic model through feedback[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2000, 14(4): 637-656.
- [11] HAROON M, ADAMS D E. A modified  $H_2$  algorithm for improved frequency response function and nonlinear parameter estimation[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 320(4/5): 822-837.
- [12] MUHAMAD P, SIMS N D, WORDEN K. On the orthogonalised reverse path method for nonlinear system identification[J]. Journal of Sound and Vibration, 2012, 331(20): 4488-4503.
- [13] MAGNEVALL M, JOSEFSSON A, AHLIN K, et al. Nonlinear structural identification by the “Reverse Path” spectral method[J]. Journal of Sound and Vibration, 2012, 331(4): 938-946.
- [14] MARCHESIELLO S, GARIBALDI L. A time domain approach for identifying nonlinear vibrating structures by subspace methods[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2008, 22(1): 81-101.
- [15] ZHANG M W, WEI S, PENG Z K, et al. A two-stage time domain subspace method for identification of nonlinear vibrating structures[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2017, 120: 81-90.

## Simulation Analysis of Parameter Estimation and Spatial Location Identification of Memoryless Nonlinear System

XU Fei, HU Xuemin

(School of Automotive Engineering, Yancheng Institute of Technology, Yancheng Jiangsu 224051, China)

**Abstract:** A zero-memory nonlinear system is considered in this paper. Firstly, the nonlinear restoring force is treated as external loads and used together with input force and output displacement to form a general multiple input single output system. Then an improved parameter estimation method, which is suitable for nonlinear elements presented at any spatial location, is presented. Finally, based on ‘Reverse Path’ method and multiple coherence function, random excitation and response data are used to identify the spatial location of nonlinearity. Two numerical simulations are used to verify the presented approach. The results indicate that the presented approach works well for calculating the forced response, as well as for identifying the nonlinear location and estimating the nonlinear parameter.

**Keywords:** nonlinear system; forced response; spatial location identification; parameter estimation

(责任编辑:李华云)