doi:10.16018/j.cnki.cn32-1650/n.202104013

Heston模型下考虑随机劳动收入的最优投资问题

姜 奎
(蚌埠工商学院 计算机与数据工程学院,安徽 蚌埠 233000)

摘要:基于Heston随机波动率模型研究投资者拥有一份随机劳动收入的最优投资问题。假设金融市场由一个风险资产(股票)和无风险资产(银行存款)构成,并考虑投资者拥有一份随机劳动收入,在指数效用函数下使其终端财富最大化;利用随机控制方法得到该问题的最优投资策略的解析表达式,通过数值模拟分析模型中的主要参数以及劳动收入对最优投资策略的影响。结果表明:随着投资者的劳动收入波动率增大,投资到风险资产的比例减小;在风险厌恶系数增大时,投资到风险资产的比例也减小;风险资产的投资比例对Heston模型中的参数变化非常敏感。

关键词:Heston模型;劳动收入;随机控制;最优投资;指数效用函数

中图分类号:O211.6 **文献标志码**:A **文章编号**:1671-5322(2021)04-0072-05

最优投资组合的选择问题一直是金融数学研究的热点问题。Merton[1-2]首次在连续时间金融模型下用随机动态规划方法研究了最优消费-投资组合问题;谢超强等[3]基于Heston随机波动率模型和指数效用函数框架研究了资产负债管理问题,具体地说是用随机控制方法得到最优资产配置策略的解析解,再通过数值模拟分析了Heston模型参数对最优资产配置策略的影响;A等[4]在Heston随机波动率模型下研究了一个具有时滞的保险公司的最优投资和超额损失再保险问题;常浩等[5]在指数效用函数下,通过随机最优控制方法研究最优再保险-投资问题,其中股票波动率满足Heston随机波动率模型;文献[6-8]进一步研究了Heston模型下的最优投资组合问题。

随着最优投资组合问题的深入研究,越来越多的因素被考虑到投资组合问题中,其中一个关键因素是劳动收入,这是因为劳动收入的多少会影响投资者的风险资产投资比例。Sun等[9]研究了随机利率条件下养老金固定缴款计划的投资组合问题,其中投资者拥有一份随机劳动收入,而劳动收入的不确定性与利率和风险资产价格相关;Wang等[10]假设劳动收入受借贷约束等因素的影响,构建了一个不完备的金融市场模型,并在递归效用函数下获得相应问题的解析解;杨鹏[11]基于均值-方差准则、效用的随机微分博弈和均值-方差准则的随机微分博弈3种目标函数,分别探讨了随机工资情况下的养老金最优投资问题。

本文在Heston模型基础上考虑投资者拥有一份随机劳动收入,利用随机控制理论获得最优投资问题的解析解,理论模型更切合实际。

1 问题模型

1.1 基本假设

为了对建立的模型有严格的数学描述,首先作如下假设:

(1)金融市场无摩擦,投资者在投资过程中不考虑交易成本和税收费用,并允许卖空;

(2) (Ω, F, P)是一个完备的概率空间,模型中的随机过程和随机变量均定义在此概率空间上,$\{F_t\}_{t\in\{0,T\}}$是满足通常条件的σ-域流;

(3)金融市场有一种无风险资产(银行存款)和一种风险资产(股票),并且可以连续交易,投

收稿日期:2021-01-12
作者简介:姜奎(1990—),男,安徽宿州人,助教,硕士,主要研究方向为金融数学与金融工程。

资期限为$[0,T]$,且在投资期间内投资者拥有一份随机劳动收入。

1.2　模型建立

在t时刻无风险资产的价格$M(t)$满足下面的微分方程,即

$$\frac{\mathrm{d}M(t)}{M(t)} = r\mathrm{d}t,\ M(0) = M_0 \tag{1}$$

式中:r为无风险利率,且是常数。

风险资产(股票)在t时刻的价格过程$S(t)$满足如下的随机微分方程,即

$$\mathrm{d}S(t) = S(t)[(r + \lambda V(t))\mathrm{d}t + \sigma_s\sqrt{V(t)}\,\mathrm{d}B(t)],\quad S(0) = s_0 > 0 \tag{2}$$

式中:$S(t)$服从Heston随机波动率模型;λ是风险资产的预期收益率,且$\lambda > 0$;σ_s是风险资产的波动率,且$\sigma_s > 0$;$B(t)$是定义在完备概率空间上的一维布朗运动;$V(t)$为瞬时方差,满足CIR(Cox-Ingersoll-Ross)模型。

$$\mathrm{d}V(t) = k(\theta - V(t))\mathrm{d}t + \sigma_v\sqrt{V(t)}\,\mathrm{d}B(t),\quad V(0) = v_0 > 0 \tag{3}$$

式中:k,θ,σ_v均为正常数,其中k表示均值回复速度,θ表示长期均值,σ_v代表瞬时方差波动率,且$2k\theta > \sigma_v^2$,保证$V(t) > 0$。

在投资期限$[0,T]$内,投资者拥有一份随机劳动收入$Y(t)$,t时刻$Y(t)$满足如下随机微分方程。

$$\frac{\mathrm{d}Y(t)}{Y(t)} = \mu\mathrm{d}t + \sigma_y\sqrt{V(t)}\,\mathrm{d}B(t),Y(0) = y_0 > 0 \tag{4}$$

式中:μ、σ_y均为大于0的常数,其中μ是劳动收入的预期增长率,σ_y为劳动收入波动率 。

在上述模型框架下,假定投资者在t时刻的财富为$X(t)$,初始财富$x_0 > 0$,在t时刻投资到风险资产(股票)的投资比例为$\pi(t)$,投资在无风险资产(银行存款)的比例为$1 - \pi(t)$,t时刻投资者的财富过程$X(t)$满足如下的随机微分方程。

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X(t) &= X(t)\left[1 - \pi(t)\right]\frac{\mathrm{d}M(t)}{M(t)} + X(t)\pi(t)\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} + Y(t)\mathrm{d}t = \\ &\left[X(t)r + X(t)\pi(t)\lambda V(t) + Y(t)\right]\mathrm{d}t + X(t)\pi(t)\sigma_s\sqrt{V(t)}\,\mathrm{d}B(t)\end{aligned} \tag{5}$$

式中:$X(0) = x_0$,且$x_0 > y_0 > 0$。

定义1　一种投资组合策略$\pi(t)$被称为可容许的,如果$\pi(t)$满足下列条件:

(1)$\pi(t)$是$\left\{F_t\right\}_{t\in\{0,T\}}$,且可测;

(2)$E\left[\int_t^T\left(X(t)\pi(t)\sigma_s\sqrt{V(t)}\right)^2\mathrm{d}t\right] < \infty$,$E[\cdot]$表示数学期望;

(3)对任意的$\pi(t)$,方程(5)存在且是唯一的,即方程(5)有唯一强解。

将所有可容许策略构成的集合记为$\Pi = \left\{\pi(t)\right\}_{0\leqslant t\leqslant T}$。

在投资组合选择问题中,投资者希望寻找最优的投资策略$\pi^*(t)$,使其在投资期结束后终端财富$X(t)$效用最大,即求解如下的最优化问题。

$$\operatorname*{Sup}_{\pi(t)\in\Pi}\left[U\left(X(T)\right)\right] \tag{6}$$

式中:$X(t)$和$\pi(t)$满足方程(5);$U(\cdot)$表示效用函数,且是严格的凹函数,即$U'(\cdot) > 0, U''(\cdot) < 0$。

假定投资者对风险的厌恶程度满足常数绝对风险厌恶(Constant absolute risk aversion, CARA)的指数效用函数,即

$$U(x) = -\frac{1}{q}\mathrm{e}^{-qx}$$

式中:q为绝对风险厌恶系数,且$q > 0$。

2　模型求解

2.1　值函数和HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman)方程

为了最优化式(6),定义值函数:

$$J\left(t,x,y,v\right) = \operatorname*{Sup}_{J(t,x,y,v)} E\left[U\left(X(T)\right)|X(t) = x, Y(t) = y, V(t) = v\right], 0 < t < T \tag{7}$$

式中$J\left(T,x,y,v\right) = U\left(X(T)\right)$。

根据随机控制理论中的动态规划原理,得到值函数对应的HJB方程:

$$\operatorname*{Sup}_{\pi(t)\in\Pi}\left\{\begin{aligned}&J_t + k(\theta - v)J_v + \frac{1}{2}\sigma_v^2 vJ_{vv} + yuJ_y + \frac{1}{2}y^2\sigma_y^2 vJ_{yy} + \\ &\left(\lambda vx\pi(t) + rx + y\right)J_x + \frac{1}{2}x^2\pi^2(t)v\sigma_s^2 J_{xx} + \\ &\sigma_s\sigma_v vx\pi(t)J_{xv} + \sigma_s\sigma_y vx\pi(t)J_{xy} + \sigma_y\sigma_v vyJ_{yv}\end{aligned}\right\} = 0 \tag{8}$$

式中：J_t、J_x、J_y、J_v、J_{xx}、J_{vv}、J_{yy}、J_{xy}、J_{xv}、J_{yv}分别为$J(t,x,y,v)$关于t、x、y、v的一阶偏导和二阶偏导。

由最优化一阶条件可得最优投资策略为：

$$\pi^*(t)=-\frac{\lambda}{x\sigma_s^2}\frac{J_x}{J_{xx}}-\frac{\sigma_v}{x\sigma_s}\frac{J_{xv}}{J_{xx}}-\frac{y\sigma_y}{x\sigma_s}\frac{J_{xy}}{J_{xx}} \tag{9}$$

将式(9)代入式(8)，进行计算化简后，得到如下的偏微分方程。

$$J_t+k(\theta-v)J_v+\frac{1}{2}\sigma_v^2vJ_{vv}+(rx+y)J_x+yuJ_y+\frac{1}{2}y^2\sigma_y^2vJ_{yy}+\sigma_y\sigma_vvyJ_{yv}-\frac{1}{2}\frac{v}{J_{xx}}\left(\frac{\lambda^2}{\sigma_s^2}J_x^2+\sigma_v^2J_{xv}^2+y^2\sigma_y^2J_{xy}^2+2\frac{\lambda\sigma_v}{\sigma_s}J_xJ_{xv}+2\frac{\lambda\sigma_y}{\sigma_s}J_xJ_{xy}+2y\sigma_y\sigma_vJ_{xy}J_{xv}\right)=0 \tag{10}$$

2.2 指数效用函数下的最优投资策略

假设值函数形式为$J(t,x,y,v)=-\frac{\exp\{-q[a(t)x+b(t)y+c(t)v+d(t)]\}}{q}$，值函数边界条件为$a(T)=1$、$b(T)=0$、$c(T)=0$、$d(T)=0$，对上面值函数求偏导数，得

$$J_t=\{-q[a'(t)x+b'(t)y+c'(t)v+d'(t)]\}J,$$

$$J_x=[-qa(t)]J,\ J_{xx}=[-qa(t)]^2J,$$
$$J_y=[-qb(t)]J,\ J_{yy}=[-qb(t)]^2J,$$
$$J_v=[-qc(t)]J,\ J_{vv}=[-qc(t)]^2J,$$
$$J_{xy}=q^2a(t)b(t)J,\ J_{xv}=q^2a(t)c(t)J,$$
$$J_{yv}=q^2b(t)c(t)J$$

将上面的偏导数代入方程(10)，通过计算可得到

$$-a'(t)x-a(t)rx-b'(t)y-a(t)y-b(t)uy-c'(t)v+c(t)kv-\frac{1}{2q}\frac{\lambda^2v}{\sigma_s^2}+c(t)\frac{\lambda v\sigma_v}{\sigma_s^2}+b(t)\frac{\lambda v\sigma_y}{\sigma_s^2}-d'(t)-c(t)k\theta=0 \tag{11}$$

利用分离变量的方法求解方程(11)，得到如下4个常微分方程。

$$\begin{cases}a'(t)+a(t)r=0\\a(T)=1\end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases}b'(t)+ub(t)+a(t)=0\\b(T)=0\end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases}c'(t)-kc(t)+\frac{\lambda^2}{2q\sigma_s^2}-\frac{\lambda\sigma_v}{\sigma_s}c(t)-\frac{\lambda\sigma_y}{\sigma_s}b(t)=0\\c(T)=0\end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases}d'(t)+c(t)k\theta=0\\d(T)=0\end{cases} \tag{15}$$

通过计算求解，可得：

$$a(t)=e^{r(T-t)} \tag{16}$$

$$b(t)=e^{u(t-T)}\int_t^Ta(s)e^{u(s-T)}ds \tag{17}$$

$$c(t)=e^{(k+\frac{\lambda\sigma_v}{\sigma_s})(t-T)}\int_t^T\left(\frac{\lambda^2}{2q\sigma_s^2}-\frac{\lambda\sigma_y}{\sigma_s}b(s)\right)e^{-(k+\frac{\lambda\sigma_v}{\sigma_s})(s-T)}ds \tag{18}$$

$$d(t)=\int_t^Tk\theta c(s)ds \tag{19}$$

由上述讨论，可以得到如下定理：

定理1 在指数效用函数下，考虑投资者拥有一份随机劳动收入的最优投资策略为

$$\pi^*(t)=\frac{\lambda}{\sigma_s^2x}\frac{1}{qa(t)}-\frac{\sigma_v}{\sigma_sx}\frac{c(t)}{a(t)}-\frac{y\sigma_y}{\sigma_sx}\frac{b(t)}{a(t)} \tag{20}$$

式中$a(t)$、$b(t)$、$c(t)$分别由式(16)、式(17)和式(18)给出。

3 数值分析

为进一步说明Heston模型中相关参数和劳动收入对最优投资策略$\pi^*(t)$的影响，本节在表1给定相关参数基础上通过数值模拟分析了参数λ、σ_v、劳动收入波动率σ_y和绝对风险厌恶系数q对$\pi^*(t)$的影响，如图1~图4所示。

由式(20)指数效用函数下投资者的最优投资策略$\pi^*(t)$的表达式可知，$\pi^*(t)$是参数λ的增函数。由于λ表示风险资产的预期收益率，λ值

表1　基本参数表

Table1　Basic parameter list

参数	参数值
无风险利率r/%	5
风险资产波动率σ_s/%	8
$v(t)$的均值回复速度k	0.3
投资时间T/a	20
初始时刻t	0
初始财富x	20
初始劳动收入y	4
劳动收入的预期收益率μ/%	15

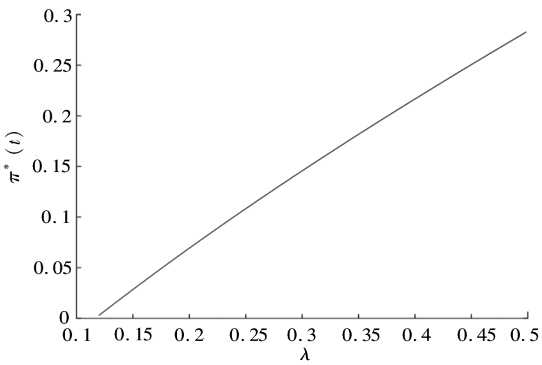

图1　参数λ对最优投资策略$\pi^*(t)$的影响

Fig 1　The influence of parameter λ on optimal investment strategy $\pi^*(t)$

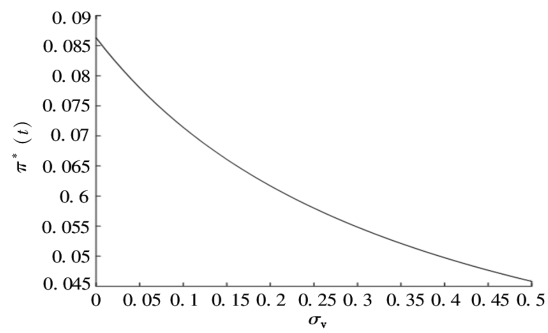

图2　参数σ_v对最优投资策略$\pi^*(t)$的影响

Fig 2　The influence of parameter σ_v on optimal investment strategy $\pi^*(t)$

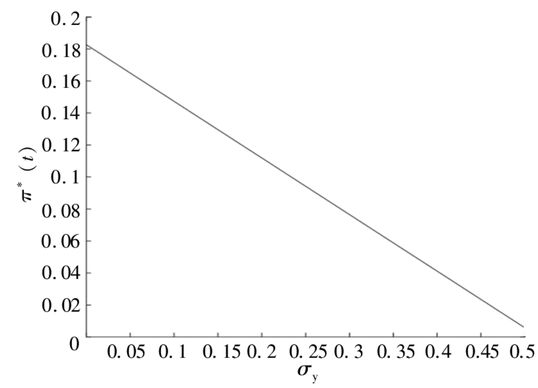

图3　参数σ_y对最优投资策略$\pi^*(t)$的影响

Fig 3　The influence of parameter σ_y on optimal investment strategy $\pi^*(t)$

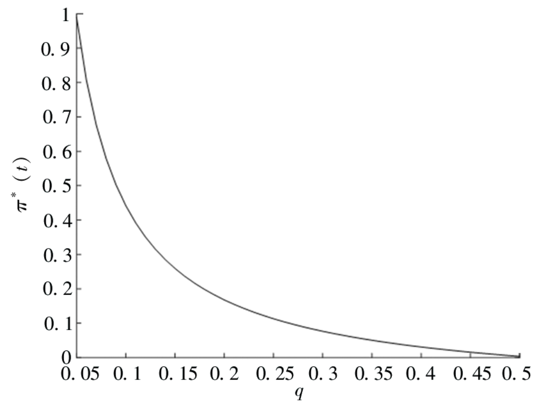

图4　参数q对最优投资策略$\pi^*(t)$的影响

Fig 4　The influence of parameter q on optimal investment strategy $\pi^*(t)$

越大表明风险资产的预期收益越高,投资者为了获得更高的风险资产收益,会加大对风险资产的投资,从而风险资产的投资比例会随着λ值的增大而增大,这和图1显示的投资者在金融市场上的投资行为较为符合。

在式(3)随机微分方程中,σ_v代表瞬时方差波动率。由最优投资策略的表达式(20)可知,当σ_v逐渐增大时,$\frac{\sigma_v}{\sigma_s x}\times\frac{c(t)}{a(t)}$逐渐增大,但最优投资策略$\pi^*(t)$会随着$\sigma_v$的逐渐增大而减少,即投资者会减少对风险资产的投入,符合图2市场的实践行为。

参数σ_y是劳动收入的波动率,在其他参数不变的条件下,σ_y的大小会影响劳动收入的稳定。σ_y越大表明劳动收入的波动性越大,即投资者的劳动收入稳定性越差,此时投资者为了应对消费等其他开支,会减少对风险资产的投资。这与图3描述恰好一致。

由图4可以看出:随着绝对风险厌恶系数q的增大,投资者投资到风险资产的比例是逐渐减小的。这表明风险厌恶系数的增大会导致投资者变得保守,即风险越高,投资越厌恶。

4　总结

在Heston随机波动率模型框架下考虑投资者拥有一份随机劳动收入,在终端财富最大化的指数函数效用下求得最优投资策略的显式解;利用MATLAB软件进行数值模拟分析,探讨主要参数和劳动收入对投资策略的影响。结果表明:(1)在其他参数条件不变的情况下,$\pi^*(t)$随着λ的增大而增加;(2)最优投资策略$\pi^*(t)$对模型中的参数σ_v比较敏感;(3)劳动收入波动率σ_y的大小会影响风险资产的投资比例,表现为σ_y越大,$\pi^*(t)$越小;(4)风险厌恶系数q与风险投资比例存在负相关关系。

参考文献：

［1］ MERTON R C. Lifetime portfolio selection under uncertainty：the continuous-time case[J]. The Review of Economics and Statistics，1969，51(3)：247-257.

［2］ MERTON R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model[J]. Journal of Economic Theory，1971，3(4)：373-413.

［3］ 谢超强，吕文元，陈进. 基于Heston随机波动率模型和风险偏好视角的资产负债管理[J]. 运筹与管理，2018，27(6)：156-161.

［4］ A C X，Li Z F. Optimal investment and excess-of-loss reinsurance problem with delay for an insurer under Heston′s SV model[J]. Insurance：Mathematics and Economics，2015，61：181-196.

［5］ 常浩，王春峰，房振明. 随机金融市场环境下的最优再保险—投资策略[J]. 控制理论与应用，2019，36(2)：307-318.

［6］ 马娟，樊顺厚，常浩. Heston模型下基于HARA效用准则的资产—负债管理策略[J]. 系统科学与数学，2017，37(5)：1259-1271.

［7］ 孙景云，郑军，张玲. 基于通货膨胀风险和Heston随机波动率下的最优资产配置[J]. 运筹与管理，2017，26(1)：148-155.

［8］ 孙惠玲，王传玉. 考虑红利支付和随机波动的确定缴费型养老金最优投资策略[J]. 盐城工学院学报(自然科学版)，2017，30(2)：71-74.

［9］ SUN J Y，LI Y J，ZHANG L. Robust portfolio choice for a defined contribution pension plan with stochastic income and interest rate[J]. Communications in Statistics - Theory and Methods，2018，47(17)：4106-4130.

［10］ WANG C，WANG N，YANG J Q. Optimal consumption and savings with stochastic income and recursive utility[J]. Journal of Economic Theory，2016，165：292-331.

［11］ 杨鹏. 具有随机工资的养老金最优投资问题[J]. 运筹学学报，2016，20(1)：19-30.

Optimal Investment Problem of Considered Stochastic Labor Income Under Heston Model

JIANG Kui

(School of Computer Science and Data Engineering, Bengbu College of Technology and Business, Bengbu Anhui 233000, China)

Abstract：Based on Heston stochastic volatility model, the optimal investment problem of investors with a random labor income is studied. Assume that the financial market consists of a risky asset (stock) and a risk-free asset (bank deposits), and consider that investors have a random labor income to maximize their terminal wealth under the exponential utility function. The stochastic control method is used to obtain the analytical expression of the optimal investment strategy for this problem, and the influence of the main parameters in the model and labor income on the optimal investment strategy is analyzed by numerical simulation. The results show that with the increase of labor income volatility, the proportion of investment in risk assets decreases. When the risk aversion coefficient increases, the proportion of investment in risk assets also decreases. The investment proportion of risk assets is very sensitive to the changes of parameters in Heston model.

Keywords：Heston model；labor income；stochastic control；optimal investment；exponential utility function

(责任编辑：李华云)