第8卷 第3期
1995年10月

盐城工业专科学校学报
Journal of Yancheng College of Technology

Vol. 8 No. 3
Oct. 1995

非齐次线性方程组的半正解

姜殿玉
（连云港化工高等专科学校，连云港，222001）

摘　要　线性方程组的不带负分量的非零解向量称为半正解。本文给出非齐次线性方程组 $AX=b(b\neq 0)$ 的半正解结构，进而得到该类线性方程组有半正解的充分条件和必要条件以及唯一半正解的充要条件。该问题在有关计谋问题的数学体系中得到应用。

关键词　非齐次线性方程组　半正解　基础解系　线性无关

引　言

对于向量 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，如果 $\alpha_i\geqslant 0, i=1,\cdots,n$，则 α 称为非负的，记作 $\alpha\geqslant 0$；如果 $\alpha_i>0$，$i=1,\cdots,n$，则 α 称为正的，记作 $\alpha>0$；如果 $\alpha_i\geqslant 0, i=1,\cdots,n$ 且存在 $1\leqslant i\leqslant n$，使 $\alpha_i>0$，则 α 称为半正的，记作 $\alpha\gg 0$（该记号源于文献[1]）。

$A_{m\times n}$ 简记为 A，$(x_1,\cdots,x_n)^T$ 简记为 X，$(b_1,\cdots,b_m)^T$ 简记为 b，$(0,\cdots,0)$ 简记为 0。

设 A 的秩 $rank(A)=r$。$\bar{b}_1=(b_{11},\cdots,b_{r1},1,0,\cdots,0)^T$，$\bar{b}_2=(b_{12},\cdots,b_{r2},0,1,\cdots,0)^T$，$\bar{b}_{n-r}=(b_{1,n-r},\cdots,b_{r,n-r},0,0,\cdots,1)^T$ 是 $AX=0$ 的解空间基底——基础解系。$s=(s_1,\cdots,s_n)^T$ 是 $AX=b(b\neq 0)$ 的一个特解。

$AX=b$ 的解称为半正解，如果这个解向量是半正的，该方程组的半正解的全体称为半正通解。

在本文中，作者将给出非齐次线性方程组 $AX=b(b\neq 0)$ 的半正解的结构（若存在），并顺便指出半正解存在的充分条件和必要条件以及有唯一半正解的充要条件。

因有如下平凡论断：

(1)若有 $1\leqslant i\leqslant n$，使 $s_i<0=b_{ij}, j=1,\cdots,n-r$，则 $AX=b$ 无半正解。

(2)若 $r=n$，则 $AX=b(b\neq 0)$ 有半正解当且仅当 $s\gg 0$ 当且仅当 s 是唯一半正解。

(3)$\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_{n-r},s$ 线性无关。所以我们设：

(4)$b_{ij}=0, j=1,\cdots,n-r\Rightarrow s_i\geqslant 0$

(5)$r<n$。

本文引进符号

$$l_1=\max_i\left\{-\frac{s_i}{b_{i1}}\,\middle|\,b_{i1}>0=b_ik,k>1\right\}=l_1^*=l_1(\quad)$$

$$l_j(k_1,\cdots,k_{j-1})=\max_i\left\{-\frac{\sum_{l<j}k_lb_{il}+s_i}{b_{ij}}\,\middle|\,b_{ij}>0\quad=b_{ik},k>j\right\},j=2,\cdots,n-r$$

$$u_1=\min_i\left\{\frac{s_i}{b_{i1}}\,\middle|\,b_{i1}<0=b_{ik},k>1\right\}=u_1^*=u_1(\quad)$$

$$u_j(k_1,\cdots,k_{j-1})=\min_i\left\{-\frac{\sum_{l<j}k_lb_{il}+s_i}{b_{ij}}\,\middle|\,b_{ij}<0=b_{ik},k>j\right\},j=2,\cdots,n-r。$$

最后定义两个递推关系：

$$c_l=\begin{cases}u_l,b_{il}\geqslant 0\\ l_l,b_{il}<0\end{cases}\quad l<j\quad\begin{cases}l_j=l_j(c_1,\cdots,c_{j-1})\\ u_j=u_j(c_1,\cdots,c_{j-1})\end{cases}$$

$$c_l^*=\begin{cases}l_l^*,b_{il}\geqslant 0\\ u_l^*,b_{il}<0\end{cases}\quad l<j\quad\begin{cases}l_j^*=l_j(c_1^*,\cdots,c_{j-1}^*)\\ u_j^*=u_j(c_1^*,\cdots,c_{j-1}^*)\end{cases}$$

这里，$j=2,\cdots,n-r$。

1　$AX=b(b\neq 0)$的半正解

定理 1　如果 $AX=b(b\neq 0)$有半正解，那么半正通解可表为 $\sum\limits_{j\leqslant n-r}k_j\bar{b}_j+s$，其中 $l_j(k_1,\cdots,k_{j-1})\leqslant k_j\leqslant u_j(k_1,\cdots,k_{j-1})$，$j=1,\cdots,n-r$。

证明　设 $g=\sum\limits_{j\leqslant n-r}k_j\bar{b}_j+s\gg 0$，则对任意 $1\leqslant j\leqslant n-r$，存在 i，使得 b_{ij}在第 i 行中最后一个不为零。因 $0\leqslant g_i=\sum\limits_{l\leqslant j}k_lb_{il}+\sum\limits_{l>j}k_lb_{ij}+s_i=k_ib_{ij}+\sum\limits_{l<j}k_lb_{il}+s_i$，所以，若 $b_{ij}>0$，则

$$k_j\geqslant-\frac{\sum\limits_{l<j}k_lb_{il}+s_i}{b_{ij}}$$

若 $b_{ij}<0$，则

$$k_j\leqslant-\frac{\sum\limits_{l<j}k_lb_{il}+s_i}{b_{ij}}$$

从而定理中递推关系得证。

反之，设 $g=\sum\limits_{j\leqslant n-r}k_j\bar{b}_j+s$，$k_j$ 满足定理中递推关系，先证 $g\geqslant 0$.

任取 $1\leqslant i\leqslant n$，若 $b_{ij}=0$，$j=1,\cdots,n-r$。由假设 4(参见引言)，$u_i=s_i\geqslant 0$，否则设 p 是使得 $b_{ij}\neq 0$ 的最后一个 j，由 k_p 的上下界

$$k_p\geqslant-\frac{\sum\limits_{l<p}k_lb_{il}+s_i}{b_{il}}(b_{ip}>0=b_{ik},k>p)$$

$$k_p\leqslant-\frac{\sum\limits_{l<p}k_lb_{il}+s_i}{b_{ip}}(b_{ip}<0=b_{ik},k>p)$$

总有 $\sum\limits_{l\leqslant p}k_lb_{il}+s_i\geqslant 0$。因此，对任意 i，有 $g_i=\sum\limits_{l\leqslant n-r}k_lb_{il}+s_i\geqslant 0$，即 $g\geqslant 0$。

现在证 $g\gg 0$。如递推关系中至少有一个等号不成立，则必有一个 i，使 $g_i=\sum\limits_{j\leqslant n-r}k_lb_{ij}+s_i>0$。设递推关系中的“$\leqslant$”都是“$=$”。如果对使得 $b_{ij}\neq 0=b_{ik}$，$(k>j)$的所有 i，都有

$$k_j=-\frac{\sum\limits_{l<j}k_jb_{il}+s_i}{b_{ij}},\quad j=1,\cdots,n-r$$

则有

$$\sum_{l\leqslant n-r}k_lb_{il}+s_i=0\qquad(*)$$

如果 $b_{ij}=0$，$j=1,\cdots,n-r$，则由引言，假设 4 有 $s_i\geqslant 0$，当 $s_i>0$ 时，已证得 $g_i=s_i>0$；否则 $s_i=0$ 也导致（$*$）成立。于是

$$\sum_{l\leqslant n-r}k_l\bar{b}_l+s=0$$

但这与 $\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_{n-r},s$ 线性无关(引言)相矛盾,所以必有列 j,行 $i_1\neq i_2$ 使得

$$-\frac{\sum_{l<j}k_lb_{i_1l}+s_{i_1}}{b_{i_1j}}\neq-\frac{\sum_{l<j}k_lb_{i_2l}+s_{i_2}}{b_{i_2j}}\qquad(b_{i_1j}\neq 0=b_{i_1k}=b_{i_2k}\neq b_{i_2j},k>j)$$

亦即存在 i,使

$$g_i=\sum_{l\leqslant n-r}k_lb_{il}+s_i=\sum_{l\leqslant j}k_lb_{il}+s_i>0$$

于是有 $g\gg 0$,证完。

注记 1　因为使 $b_{ij}>0=b_{ik},k>j$ 的 b_{ij} 一定存在(例如 b_{r+j},j),所以 $l_1,l_i(k_1,\cdots,k_{j-1})(j\geqslant 2)$ 一定存在;但 $u_1,u_j(k_1,\cdots,k_{j-1})$ 不一定总存在。

注记 2　$k_j(j\geqslant 2)$ 的上下界均依赖于前 $j-1$ 个 $k_1,\cdots,k_{k-1}$ 的选择。不同选择对应于 k_j 可能不同的上下界。

2　$AX=b(b\neq 0)$ 有半正解的条件

引理 2　从(1) $l_j(k_1,\cdots,k_{j-1})\leqslant k_j\leqslant u_j(k_1,\cdots,k_{j-1})$,(2) $l_j\leqslant l_j(k_1,\cdots,k_{j-1})$ 和 $u_j\geqslant u_j(k_1,\cdots,k_{j-1})$,可以推出 $l_{j+1}\leqslant l_{j+1}(k_1,\cdots,k_j)$ 和 $u_{j+1}\geqslant u_{j+1}(k_1,\cdots,k_j)$,$j=1,\cdots,n-r-1$。

证明　当 $b_{ij}\geqslant 0$ 时,由 $u_j\geqslant u_j(k_1,\cdots,k_{j-1})\geqslant k_j$ 得 $\sum_{l\leqslant j}c_lb_{il}+s_i=c_jb_{ij}+\sum_{l<j}c_lb_{il}+s_i=u_jb_{ij}+\sum_{l<j}c_lb_{il}+s_i\geqslant k_jb_{ij}+\sum_{l<j}k_lb_{il}+s_i=\sum_{l\leqslant j}k_lb_{il}+s_i$。当 $b_{ij}<0$ 时,同理可得 $\sum_{l\leqslant j}c_lb_{il}+s_i\geqslant\sum_{l\leqslant j}k_lb_{il}+s_i$,于是

$$\begin{aligned}l_{j+1}&=\max_i\{-\frac{\sum_{l\leqslant j}c_lb_{il}+s_i}{b_{i,j+1}}\mid b_{i,j+1}>0=b_{ik},k>j+1\}\\&\leqslant\max_i\{-\frac{\sum_{l\leqslant j}k_lb_{il}+s_i}{b_{i,j+1}}\mid b_{i,j+1}>0=b_{ik},k>j+1\}=l_{j+1}(k_1,\cdots,k_j)\end{aligned}$$

同理可证 $u_{j+1}\geqslant u_{j+1}(k_1,\cdots,k_j)$。证毕。对偶可得

引理 3　由(1) $l_j^*\leqslant k_j\leqslant u_j^*$,(2) $l_j^*\geqslant l_j(k_1,\cdots,k_{j-1})$ 和 $u_j^*\leqslant u_j(k_1,\cdots,k_{j-1})$,可以推出 $l_{j+1}^*\geqslant l_{j+1}(k_1,\cdots,k_j)$ 和 $u_{j+1}^*\leqslant u_{j+1}(k_1,\cdots,k_j)$,$j=1,\cdots,n-r-1$。

定理 4　若 $l_j^*\leqslant u_j^*$,$j=1,\cdots,n-r$,则 $AX=b$ 有半正解。

证明　对 j 用归纳法,充分证明 $l_j^*\geqslant l_j(k_1,\cdots,k_{j-1})$,$u_j^*\leqslant u_j(k_1,\cdots,k_{j-1})$,$j=1,\cdots,n-r$,因由假设 $l_j^*\leqslant u_j^*$ 可得 $l_j(k_1,\cdots,k_{j-1})\leqslant u_j(k_1,\cdots,k_{j-1})$,$j=1,\cdots,n-r$。

当 $j=1$ 时,有 $l_1^*=l_1(\quad)$,$u_1^*=u_1(\quad)$。假定已有 $l_j^*\geqslant l_j(k_1,\cdots,k_{j-1})$,$u_j^*\leqslant u_j(k_1,\cdots,k_{j-1})$。由条件有 k_j,使 $l_j^*\leqslant k_j\leqslant u_j^*$。故由引理 3 得 $l_{j+1}^*\geqslant l_{j+1}(k_1,\cdots,k_j)$,且 $u_{j+1}^*\leqslant u_{j+1}(k_1,\cdots,k_j)$,由归纳法原理,定理得证。

定理 5　若 $AX=b(b\neq 0)$ 有半正解,则 $l_j\leqslant u_j$,$j=1,\cdots,n-r$。

证明　由引理 2,仿定理 4 可证 $l_j\leqslant l_j(k_1,\cdots,k_{j-1})$ 且 $u_j(k_1,\cdots,k_{j-1})\leqslant u_j$,$j=1,\cdots,n-r$。因 $AX=b(b\neq 0)$ 有正解,故 $l_j(k_1,\cdots,k_{j-1})\leqslant u_i(k_1,\cdots,k_{j-1})$,从而 $l_j\leqslant u_j$,$j=1,\cdots,n-r$。证毕。

定理 6　若 $l_j^*\leqslant u_j^*$,$j=1,\cdots,n-r$,则 $l_j\leqslant l_j(k_1,\cdots,k_{j-1})\leqslant l_j^*$ 且 $u_j^*\leqslant u_j(k_1,\cdots,k_{j-1})\leqslant u_j$,$j=1,\cdots,n-r$。

证明　由定理 4 的证明知 $l_j^*\leqslant l_j(k_1,\cdots,k_{j-1})$ 且 $u_j^*\leqslant u_j(k_1,\cdots,k_{j-1})$。由定理 4 知 $AX=b$

$(b\neq 0)$有半正解，再由定理 5 的证明知 $l_j\leqslant l_j(k_1,\cdots,k_{j-1})$ 且 $u_j\geqslant u_j(k_1,\cdots,k_{j-1})$。证毕。

由定理 4,5 立即得到

定理 7 如果 $l_j=l_j^*,u_j=u_j^*,j=1,\cdots,n-r$，那么 $AX=b(b\neq 0)$ 有半正解的充要条件是 $l_j\leqslant u_j,j=1,\cdots,n-r$。此时有半正通解 $\sum\limits_{j\leqslant n-r}k_j\bar{b}_j+s,l_j\leqslant k_j\leqslant u_j,j=1,\cdots,n-r$。

定理 8 $AX=b(b\neq 0)$ 有唯一半正解的充要条件是 $l_j=u_j^*,l_j^*=u_j,j=1,\cdots,n-r$。唯一的半正解为 $\sum\limits_{j\leqslant n-r}l_j\bar{b}_j+s$。

证明 充分性 先证明 $l_j^*=l_j,u_j^*=u_j,j=1,\cdots,n-r$。事实上已有 $l_1^*=l_1,u_1^*=u_1$。对 $j\geqslant 1$，若 $b_{ij}\geqslant 0$，则 $c_j=u_j=l_j^*=c_j^*$；若 $b_{ij}<0$，也有 $c_j=l_j=u_j^*=c_j^*$。因此

$$l_{j+1}=l_{j+1}(c_1,\cdots,c_j)=l_{j+1}(c_1^*,\cdots,c_j^*)=l_{j+1}^*$$

$$u_{j+1}=u_{j+1}(c_1,\cdots,c_j)=u_{j+1}(c_1^*,\cdots,c_j^*)=u_{j+1}^*$$

其次，假定 $AX=b(b\neq 0)$ 无半正解。由定理 4，存在 j，使 $l_j^*>u_j^*$。但是一方面由上段有 $l_j>u_j$；另一方面由条件 $l_j=u_j^*,u_j=l_j^*$ 得 $l_j<u_j$。矛盾。所以 $AX=b(b\neq 0)$ 必有半正解。

最后证明半正解的唯一性。因有正解，故由定理 5 得 $l_j\leqslant u_j,j=1,\cdots,n-r$。由条件知 $u_j^*\leqslant l_j^*$。再由第一段有 $u_j\leqslant l_j$。所以 $l_j=u_j=l_j^*=u_j^*$。由定理 6 得 $l_j(k_1,\cdots,k_{j-1})=u_j(k_1,\cdots,k_{j-1})$，从而 $k_j=l_j,j=1,\cdots,n-r$。

必要性 设 $\sum\limits_{j\leqslant n-r}k_j\bar{b}_j+s$ 是 $AX=b(b\neq 0)$ 的唯一半正解。现用 j 上的归纳法充分证明 $l_j=l_j^*=u_j^*=u_j$ 且 $l_j(k_1,\cdots,k_{j-1})\leqslant l_j^*$ 且 $u_j(k_1,\cdots,k_{j-1})\geqslant u_j^*$。

当 $j=1$ 时，因 k_1 的唯一性，$l_1=l_1^*=u_1^*=u_1$ 且有 $l_1(\quad)\leqslant l_1^*,u_1(\quad)\geqslant u_1^*$。

假定已有(1)$l_j=l_j^*=u_j^*=u_j$，(2)$l_j(k_1,\cdots,k_{j-1})\leqslant l_j^*$，且 $u_j(k_1,\cdots,k_{j-1})\geqslant u_j^*$。那么若 $b_{ij}\geqslant 0$，则 $c_j=u_j=l_j^*=c_j^*$；若 $b_{ij}<0$，则也有 $c_j=l_j=u_j^*=c_j^*$（由归纳假定(1)），所以 $l_{j+1}=l_{j+1}(c_1,\cdots,c_j)=l_{j+1}(c_1^*\cdots,c_j^*)=l_{j+1}^*$ 且 $u_{j+1}=u_{j+1}(c_1,\cdots,c_j)=u_{j+1}(c_1^*,\cdots,c_j^*)=u_{j+1}^*$。由归纳假定(1)有 k_j，使 $l_j^*\leqslant k_j\leqslant u_j^*$。由归纳假定(2)及引理 3 得 $l_{j+1}^*\geqslant l_{j+1}(k_1,\cdots,k_j),u_{j+1}^*\leqslant u_{j+1}(k_1,\cdots,k_j)$。假定 $l_{j+1}^*>u_{j+1}^*$，则 $l_{j+1}>u_{j+1}$。由定理 5，$AX=b(b\neq 0)$ 无半正解，矛盾。所以 $l_{j+1}^*\leqslant u_{j+1}^*$。因为 $AX=b(b\neq 0)$ 仅有唯一半正解，所以 $l_{j+1}(k_1,\cdots,k_j)=u_{j+1}(k_1,\cdots,k_j)$。所以 $l_{j+1}^*=u_{j+1}^*$。由归纳法原理，定理得证。

3 举例

例 1 鸡翁一，值钱五。鸡母一，值钱三。鸡雏三，值钱一。百钱买百鸡，问鸡翁鸡母鸡雏各几何？（《张丘建算经》）

解 由方程组
$$\begin{cases}x+y+z=100\\5x+3y+\dfrac{1}{3}z=100\end{cases}$$

解得 $\bar{b}_1=(4,-7,3)^T,s=(-100,200,0)^T$。$l_1=max\{-\dfrac{-100}{4},-\dfrac{0}{3}\}=25,u_1=min\{-\dfrac{200}{-7}\}=200/7$。因要整数解，所以取 $u_1=[\dfrac{200}{7}]=28$，所以解为 $g=k\bar{b}_1+s=(4k-100,-7k+200,3k)^T$，$25\leqslant k\leqslant 28$，即

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 25 \\ z = 75 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 18 \\ z = 78 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 11 \\ z = 81 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \\ z = 84 \end{cases}$$

例 2　已知一个方程组的 $[\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, s]$ 为

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

问该方程组有无半正解，若有，求半正通解。

解

$$l_1 = l_1^* = \max\{-\frac{-1}{1}, -\frac{1}{1}\} = 1, u_1 = u_1^* = \min\{-\frac{4}{-2}\} = 2$$

$$l_2 = \max\{-\frac{2 \times 0 + 3}{1}\} = -3, u_2 = \min\{-\frac{3 \times 2 + 1}{-2}\} = \frac{7}{2}$$

$$l_3 = \max\{-\frac{0 \times 2 + 0 \times 2 + 2}{1}\} = -2, u_3 = \min\{-\frac{2 \times 1 + 2 \times 2 - 2}{-1}\} = 2$$

$$l_2^* = \max\{-\frac{0 \times 1 + 3}{1}\} = -3, u_2^* = \min\{-\frac{3 \times 1 + 1}{-2}\} = 2$$

$$l_3^* = \max\{-\frac{0 \times 1 + 0 \times 1 + 2}{1}\} = -2, u_3^* = \min\{-\frac{1 \times 1 + 2 \times 1 - 2}{-1}\} = 1$$

因为 $l_1^* = 1 < 2 = u_1^*$，$l_2^* = -3 < 2 = u_2^*$，$l_3^* = -2 < 1 = u_3^*$，所以方程组有半正解，半正通解为

$$g = k_1(-2,1,3,1,1,0,0)^T + k_2(0,0,-2,2,0,1,0)^T + k_3(0,0,0,-1,0,0,1)^T + (4,-1,1,-2,1,3,2)^T = (-2k_1 + 4, k_1 - 1, 3k_1 - 2k_2 + 1, k_1 + 2k_2 - k_3 - 2, k_1 + 1, k_2 + 3, k_3 + 2)^T$$

因 $l_2^* = -3 \leqslant l_2(k_1) \leqslant -3 = l_2$，故 $l_2(k_1) = -3$，又 $l_3^* = -2 < l_3(k_1, k_2) < -2 = l_3$，故 $l_3(k_1, k_2) = -2$，所以 $1 \leqslant k_1 \leqslant 2$，$-3 \leqslant k_2 \leqslant u_2(k_1)$，$-2 \leqslant k_3 \leqslant u_3(k_1, k_2)$，这里 $2 = u_2^* \leqslant u_2(k_1) \leqslant u_2 = 7/2$，$1 = u_3^* \leqslant u_3(k_1 k_2) \leqslant u_3 = 2$。

例如　当取 $k_1 = 1$ 时，$u_2(1) = \min\{-\frac{1 \times 3 + 1}{-2}\} = 2$，得 $-3 \leqslant k_2 \leqslant 2$；当取 $k_2 = 1$ 时，由 $k_1 = 1$ 得 $u_3(1,1) = \min\{-(1 \times 1 + 2 \times 1 - 2)/-1\} = 1$，故 $-2 \leqslant k_3 \leqslant 1$。如再取 $k_3 = 1$，便可得到一组半正解 $(2020243)^T$。

参考文献

1　陈光迪. 组合优化. 南京大学出版社. 1993:8

2　Marshall Hall, Jr. Combinatory Theory second Edition, 1986

3　Murray C. Kemp Yoshio Kimura, Introduction to Mathematical Economics, Spring－verlag New Yerk. Inc, 1978