

量本利(CVP)分析扩展数学模型初探

张 芊

(南京审计学院, 南京, 210029)

摘 要 传统CVP分析的假设前提在很大程度上制约了其适用范围。本文在分别放宽其中一个假设条件, 其它假设条件不变的前提下, 建立了多品种CVP分析模型、单品种价格变动CVP分析模型和单品种销量随机变动CVP分析模型。

关键词 CVP分析 扩展模型 盈亏平衡 利润决策

引 言

CVP分析即西方管理会计学中的量本利分析, 是指对成本(cost)、业务量(volume)、利润(profit)三者相互之间内在联系进行综合分析的一种定量分析方法。这种方法通过计算和图解, 确定企业的盈亏平衡点以及企业在各个产销水平上的盈亏数额, 为企业实行目标管理、成本控制、利润预测、中短期投资决策提供定量数据, 从而成为现代企业管理的重要定量分析方法之一。

CVP分析有两个基本公式:

(1) 盈亏平衡方程式

$$x_0 = f / (p - b) \text{ 或 } R_0 = f / m \quad (1)$$

式中, x_0 为盈亏平衡时的业务量(产销量); f 为固定成本总额; p 为产品销售单价; b 为单位变动成本; R_0 为盈亏平衡时的销售额($R_0 = px_0$); m 为产品的边际收益率($m = (p - b) / p$)。

盈亏平衡方程式主要用来计算企业盈亏平衡(即保本)时的产销量和销售额(分别称其为盈亏平衡点产销量和盈亏平衡点价值量), 为企业组织和安排生产提供资料; 预测企业各产销水平上所发生的盈亏额, 以及固定成本、单价和单位变动成本等因素变动时对盈亏平衡点的影响; 判断企业生产经营活动的效果和发展趋势, 对企业经营安全性作出预警。

(2) 利润分析方程式

$$\pi = (p - b)x - f \text{ 或 } \pi = mR - f \quad (2)$$

式中, π 为销售利润; x 为销售数量; R 为销售收入。

利润分析方程式主要用来预测达到目标利润的目标成本和产销量, 分析产销量、产品单价、固定成本、单位变动成本等因素变动对销售利润的影响程度。

盈亏平衡方程式和利润分析方程式是在对复杂企业经营活动系统作了某些简化处理的基础上建立的, 其假设前提是: (1) 企业生产单一产品; (2) 产销量相等; (3) 分析期内单位产品的销售价格不变; (4) 成本可划分为固定成本和变动成本两部分, 且固定成本和单位变动成本保持不变。

这些假设使得分析模型简明直观, 易于理解掌握而被广泛推广使用, 但同时也正是由于这些假设条件在很大程度上制约了适用范围。因为很少有企业只生产一种产品; 企业内外部环境

不断变化很难保证企业生产的产品都能以不变动的价格销售出去;产品供不应求或供过于求,期初期末库存变动,产品销售价格上下波动等等是不可避免的。本文将适当放宽假设条件,拓宽 CVP 分析模型,扩大 CVP 分析的适用范围。

1 多产品 CVP 分析模型

企业一般生产的产品都在两种以上,即使是生产单一的产品也有多种不同的规格。不同品种、不同规格的产品销售单价、单位变动成本不尽相同,使多品种 CVP 分析显得较为复杂。在下面的分析中不妨假设在分析期内各产品的单价、单位变动成本、固定成本不变。

1.1 多品种盈亏平衡点的性质

不同产品在数量上具有不可加性,在下面的讨论中出现的多品种盈亏平衡点一律指价值量——盈亏平衡时的销售额。

单一产品盈亏平衡时,固定成本正好由这一产品的销售额超过变动成本的差额(称之为边际收益)完全抵补。由此类推,多产品盈亏平衡时,各种产品的边际收益之和应能正好补偿固定成本。其数学表达式为:

$$\sum_{i=1}^n (p_i - b_i) x_{0i} = f \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^n m_i R_{0i} = f \quad (3)$$

式中: p_i 为第 i 种产品销售单价; b_i 为第 i 种产品盈亏平衡时第 i 种产品的产销量; f 为固定成本总额; m_i 为第 i 种产品的边际收益率; R_{0i} 为盈亏平衡时第 i 种产品的销售量。

盈亏平衡时的销售额 R_0 是各产品的销售额 R_{0i} 之和,由此可得多品种盈亏平衡方程组

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \sum_{i=1}^n R_{0i} \\ \sum_{i=1}^n m_i R_{0i} &= f \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

从数学角度看,方程组(4)中的第 2 个方程有 n 个变量 $R_{0i} (i=1, 2, \dots, n)$, 第 1 个方程有 $n+1$ 个变量,比第 2 个方程组多了一个变量 R_0 , 而 $n > 1$, 即 $n+1 > 2$, 这是一个未知变量个数大于方程个数的线性方程组,根据线性代数知识可知该方程组有无穷多组解,因此多品种盈亏平衡点是不唯一的,但是它有最大值和最小值。由线性规划模型

$$\left. \begin{aligned} \max R_0 &= \sum_{i=1}^n R_{0i} \\ \sum_{i=1}^n m_i R_{0i} &= f \quad m_i > 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \min R_0 &= \sum_{i=1}^n R_{0i} \\ \sum_{i=1}^n m_i R_{0i} &= f \quad m_i > 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

不难解得

$$\left. \begin{aligned} \max R_0 &= f/m_k \\ \min R_0 &= f/m_z \\ f/m_z &\leq R_0 \leq f/m_k \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(7)中的 m_k 表示 n 种产品中边际收益最大的第 k 种产品的边际收益; m_z 则表示边际收益最

小的第 l 种产品的边际收益。

综合上述分析可得如下结论:

(1) 多品种盈亏平衡点不唯一;

(2) 多品种盈亏平衡点最小值 = 固定成本总额 / n 种产品中最大边际收益率;

(3) 多品种盈亏平衡点最大值 = 固定成本总额 / n 种产品中最小边际收益率;

(4) 在生产能力一定的情况下, 企业盈亏平衡点越低, 盈利能力越强, 经营安全性越好。因此企业应根据市场需求, 尽可能增大生产销售边际收益率较大的产品的比重。

1.2 多品种盈亏平衡点的计算

1.2.1 固定成本分摊法

多品种盈亏平衡点之所以不唯一, 是因为用边际收益之和来抵补固定成本总额的各产销量组合结构允许变化。如果按一定的原则将这一组合结构确定下来, 就可以求得在这一结构下所对应的唯一的盈亏平衡点。

具体方法是: 用 n 种产品的计划生产量比例, 或计划销售额比例, 或基期实际销售额比例, 或预计市场需求比例等, 将固定成本分摊归集到各产品, 再按单一产品盈亏平衡点的价值量计算公式, 分别求出其盈亏平衡点(价值量), 并将其加总, 就得到所求的 n 种产品的盈亏平衡点。其数学表达式如下。

设 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 是 n 种产品的某种生产或销售的比例系数 ($d_1 + d_2 + \dots + d_n = 1$), f_i 是分摊给第 i 种产品的固定成本 ($f_i = fd_i$), 则

$$R_{0i} = \frac{f_i}{m_i} = \frac{fd_i}{m_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

满足

$$\sum_{i=1}^n m_i R_{0i} = \sum_{i=1}^n m_i f d_i / m_i = f \sum_{i=1}^n d_i = f$$

所以, 用固定成本分摊法计算多品种盈亏平衡点的公式为

$$R_0 = f \sum_{i=1}^n d_i / m_i \quad (8)$$

1.2.2 平均边际收益率近似替代法

多品种盈亏平衡点不唯一, 从另一个角度分析, 也是因为产品的边际收益率不同造成的。若用平均边际收益率统一代替各产品的边际收益率, 就可以得到多品种盈亏平衡点的近似值。这种方法对产品多达几十种或几百种的情况尤为重要。我们记销售收入总额为 R , 变动成本总额为 V , 平均边际收益率为 M , 平均边际收益率可定义为

$$M = (R - V) / R \quad (9)$$

式(9)可转化为

$$M = \sum_{i=1}^n (R_i - b_i) x_i / R = \sum_{i=1}^n m_i R_i / R \quad (10)$$

式中 R_i / R 就是第 i 种产品的销售额占总销售额的比重。由此可见, 平均边际收益率是各产品的边际收益率的加权平均数, 其权数是各产品的销售额比重。

用平均边际收益率 M 近似替代多品种盈亏平衡方程组(4)式中的 m_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 有

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n R_{0i} = R_0 \\ \sum_{i=1}^n MR_{0i} = f \end{cases} \quad (11)$$

解得

$$R_0 = f/M \quad (12)$$

式(12)就是用平均边际收益率替代法近似求解多品种盈亏平衡点的计算公式,其经济含义是:

$$\text{多品种盈亏平衡点} = \frac{\text{固定成本总额}}{\text{平均边际收益率}}$$

1.3 多品种最优利润决策

多品种产品销售利润的计算公式为

$$\pi = \sum_{i=1}^n m_i R_i - f \quad \text{或} \quad \pi = \sum_{i=1}^n (p_i - b_i)x_i - f \quad (13)$$

由前面分析我们不难看出,产品销售数量结构不同,会造成产品销售额比重不同,引起盈亏平衡点变化,从而导致利润上下波动。企业经营决策者必然要考虑,在有限的生产资源和一定的市场需求的约束条件下,如何通过产品品种搭配,使销售利润达到最大,即寻求实现利润最大化的最佳产品结构。这就是多品种最优利润决策。

多品种最优利润决策是一个典型的线性规划模型。例如,求一组变量 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的值,使之满足约束条件

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n C_{ij}x_i = c_j & (j=1, 2, \dots, m) & \text{(原材料制约)} \\ \sum_{i=1}^n h_i x_i = H & & \text{(生产能力制约)} \\ 0 \leq x_i \leq \beta_i & (i=1, 2, \dots, n) & \text{(市场需求制约)} \end{cases}$$

使目标函数 $\pi = \sum_{i=1}^n (p_i - b_i)x_i - f$ 的值最大。式中, x_i 为第 i 种产品的生产数量(决策变量); c_{ij} 为生产单位产品 i 消耗第 j 种材料的数量; C_j 为第 j 种材料的总供应量; h_i 为生产单位产品 i 所需机器小时; H 为分析期企业总机器小时; β_i 为第 i 种产品最高市场需求量。

该模型可用线性规划的解法,求解决策变量 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$, 从而确定最佳产品结构,并在此基础上计算最低盈亏平衡点和预测最优利润额。

2 单品种价格变动 CVP 分析模型

此分析模型的假设条件是,分析期产销相等,成本是销售量的线性函数。

2.1 盈亏平衡分析

一般来说,产品的销售价格不是一成不变的,要受到市场需求的影响。一种商品越稀缺,价格就越高,随着这种商品数量的不断增加,商品对人们的效用不断递减,价格也随之而降。因此价格 p 是产销量 x 的函数,记为 $p(x)$,通常 $p(x)$ 是递减函数, $p'(x) < 0$ 。当价格变动时,销售收入函数不再是销售量 x 的线性函数,而是销售量 x 的变上限积分函数

$$R(x) = \int_0^x p(t)dt \quad (\text{当 } p(x) \equiv p \text{ 时,恰有 } R(x) = px) \quad (14)$$

销售利润函数为

$$\pi(x) = R(x) - c(x) = \int_0^x p(t)dt - bx - f \quad (15)$$

盈亏平衡时, $\pi(x)=0$, 即

$$\int_0^x p(t)dt = bx + f \quad (16)$$

满足平衡方程式(16)的产销量就是单品种价格变动盈亏平衡点。

如果我们通过历史数据进行一元线性回归得到价格函数

$$p(x) = a - \beta x \quad (17)$$

其中, $a > 0, \beta > 0, a, \beta$ 均为回归系数, 将式(17)代入(16)得:

$$(\beta/2)x^2 + (b-a)x + f = 0 \quad (18)$$

解此一元二次方程得两个根

$$\begin{cases} x_{01} = (a - b - \sqrt{(b-a)^2 - 2\beta f})/\beta \\ x_{02} = (a - b + \sqrt{(b-a)^2 - 2\beta f})/\beta \end{cases}$$

x_{01} 与 x_{02} 都是盈亏平衡点, 都是划分盈亏区域的标记, 但这两个盈亏平衡点的意义不同。当产销量 $x < x_{01}$ 时, $\pi(x) < 0$, 利润为负值, 企业亏损, 当 $x > x_{01}$ 时, $\pi(x) > 0$, 利润为正值, 企业盈利, 故 x_{01} 是由亏转盈的盈亏平衡点; 而 x_{02} 恰恰相反, 是由盈变亏的盈亏平衡点。当销售收入函数与成本函数非线性时一般都有两个甚至两个以上的盈亏平衡界点, 在非线性 CVP 分析中, 这些界点反映了企业盈亏状态转移的临界值, 特别受到企业管理决策者的关注。

2.2 利润分析

产品价格的分析期不变时, 利润随产销量 x 的增加而增加, 达到最大开工率, 就可实现最大利润。但当销售价格随着产销变动时, 情况就完全不同, 扩大产销量不一定能增加利润, 存在一个使利润最大的产销量, 称其为最佳产销量。

求最佳产销量, 就是求利润函数式(15)的最大值点。用求函数最大值的方法对利润函数求导, 并令

$$\pi'(x) = p(x) - b = 0 \quad (19)$$

得

$$p(x) = b \quad (20)$$

$$x^* = p^{-1}(b) \quad (21)$$

又

$$\pi''(x) = p'(x) < 0 \quad (22)$$

故 x^* 就是 $\pi(x)$ 的最大值点, 即最佳产销量。将 x^* 代入利润方程(15), 就可求出最大利润。

若 $p(x) = a - \beta x$, 可得 $x^* = (a - b)/\beta$, 最大利润为

$$\max \pi(x) = \pi(x^*)$$

3 单品种销量随机变动 CVP 分析模型

此模型的假设条件是: 在分析期内产品销售单价、单位变动成本、固定成本为确定值; 销量是随机变量, 可根据历史数据估计其概率分布, 或至少可估计其期望和方差。

3.1 盈亏分析

在上述假设条件下,无论销量如何变动,盈亏平衡点 x_0 是确定的 ($x_0 = f(p - b)$)。当销售量 $X > x_0$ 就能保本,当 $X < x_0$ 必然亏损。由此可见销售量不确定条件下的盈亏估计和预测是相当重要的。下面按销售量概率分布未知和已知两种情况讨论。

3.1.1 销售量概率分布未知的盈亏估计

设未来市场销售量为随机变量 X ,并已知其期望和方差分别为 EX 和 DX (可用样本平均数和样本方差作为 EX 和 DX 的无偏估计)。

根据切贝谢夫不等式,对任何正数 ϵ 有 $P(|X - EX| < \epsilon) \geq 1 - DX/\epsilon^2$ 。若给出置信水平 $(1-\alpha)$ 要求 $P(|X - EX| < \epsilon) \geq 1 - \alpha$,可令 $1 - DX/\epsilon^2 = 1 - \alpha$,得到 $\epsilon = \sqrt{DX/\alpha}$ 故能以大于 $(1-\alpha)$ 置信度保证

$$|X - EX| < \sqrt{DX/\alpha}$$

即

$$EX - \sqrt{DX/\alpha} < X < EX + \sqrt{DX/\alpha} \quad (23)$$

式(23)的经济意义是:以 $(1-\alpha)$ 的置信度保证未来最低销售量为 $EX - \sqrt{DX/\alpha}$,最高销售量为 $EX + \sqrt{DX/\alpha}$ 。

(1)若盈亏平衡点 $x_0 < EX - \sqrt{DX/\alpha}$,就能在给定的置信水平上保证企业保本。

(2)若 $x_0 > EX + \sqrt{DX/\alpha}$ 说明企业亏损的概率至少为 $(1-\alpha)$ 。

(3)若 $EX - \sqrt{DX/\alpha} < x_0 < EX + \sqrt{DX/\alpha}$,则可能保本,也有可能亏损,需进一步分析。

例如,假设已知 $p=600, b=500, f=500000, EX=10000, DX=8000, \alpha=0.01$,则

$$x_0 = 500000/(600 - 500) = 5000$$

$$\sqrt{DX/\alpha} = \sqrt{8000/0.01} = 2828$$

$$EX + \sqrt{DX/\alpha} = 10000 + 2828 = 12828$$

$$EX - \sqrt{DX/\alpha} = 10000 - 2828 = 7172$$

$$7172 < x < 12828$$

$$x_0 = 5000 < 7172$$

即至少可以以 99% 的概率保证盈利。

3.1.2 销售量概率分布已知的盈亏分析

设销售量 X 服从正态分布, $X \sim N(EX, DX)$,销售量 X 大于盈亏平衡点 x_0 的概率是

$$P(X > x_0) = 1 - P(X \leq x_0) = 1 - \Phi_0((x_0 - EX)/\sqrt{DX})$$

查标准正态分布表,即可得企业保本的概率。

例如,假设 $X \sim N(10000, 80000), p = 600, b = 500, f = 500000, x_0 = 5000$,那么

$$P(X > 5000) = 1 - \Phi_0(-17.68) = \Phi_0(17.68) = 1$$

经计算知几乎可以百分之百保证企业能保本。

3.2 利润分析

在企业经营决策中,获利能力是决策的关键信息。当销售量不确定,企业未来获利水平也

不确定。由于利润是随机变量 X 的线性函数, 因此利润也是随机变量。同盈亏分析法一样, 对获利能力的预测估计也有二种方法。

3.2.1 销售量概率分布未知的利润区间估计

设销售量为随机变量 X , 其期望和方差分别为 EX 和 DX , 由利润函数

$$\pi(p-b)X - f$$

可得

$$E\pi = (p-b)EX - f$$

$$D\pi = (p-b)^2 DX$$

所以 $EX - \sqrt{DX/\alpha} < X < EX + \sqrt{DX/\alpha}$ 的置信度为 $(1-\alpha)$, 其经济意义是: 未来利润 π 介于下限 $EX - \sqrt{DX/\alpha}$ 和上限 $EX + \sqrt{DX/\alpha}$ 之间的概率至少是 $(1-\alpha)$ 。

3.2.2 销售量概率分布已知的利润分析

设销售量 X 服从正态分布, 即 $X \sim N(EX, DX)$, 利润 π 是服从正态分布的随机变量 X 的线性函数, 故 π 也服从正态分布, 且

$$E\pi = (p-b)EX - f$$

$$D\pi = (p-b)^2 DX$$

有:

$$\pi \sim N(E\pi, D\pi)$$

由此可求得

(1) 企业至少不亏损的概率为:

$$\begin{aligned} P(\pi > 0) &= 1 - \Phi_0(-E\pi / \sqrt{D\pi}) \\ &= \Phi_0(E\pi / \sqrt{D\pi}) \end{aligned}$$

查标准正态分布表, 即得概率值。

(2) 企业盈利高于目标利润的概率为:

$$P(\pi > \pi^*) = 1 - \Phi_0((\pi^* - E\pi) / \sqrt{D\pi})$$

查正态分布表, 可计算出概率值。

以上建立的 CVP 分析扩展数学模型, 只是放宽了经典 CVP 分析所规定的若干假设条件中的某一个条件, 而其他条件仍保持未变, 这些结果只是使 CVP 分析在接近现实的道路上迈进了一步, 然而还远远不够。严格地讲, CVP 分析中所涉及的销售量、销售价格、生产成本、销售利润均为随机变量, 这些变量不仅相互影响制约, 而且在其它经营因素的干扰下不断作动态变化。完善的 CVP 分析模型应能广泛适用于现实中复杂的经营业务, 这有待于理论界综合运用经济学、统计学、概率论、突变论、控制论、决策论等理论知识进一步探讨研究。

参考文献

- 1 西村明[日]. 管理会计的分析方法. 中国财政经济出版社. 1992
- 2 A·塔克[美]. 经营保本与利润决策. 中国对外经济贸易出版社. 1990
- 3 卫东如, 王德新. 企业盈亏分析原理和应用. 山东人民出版社. 1986