第 8 卷 第 3 期
1995 年 10 月
盐城工业专科学校学报
Journal of Yancheng College of Technology
Vol. 8 No. 3
Oct. 1995

析谈复合函数的极限定理及其应用

翟修平
(扬州大学水利学院，扬州，225001)

摘　要　本文对复合函数极限的存在性进行了讨论，并以例题说明用复合函数极限定理求极限的方法。

关键词　复合函数　极限　连续　变量代换

复合函数求极限有如下定理：

定理 1　对函数 $y=f(u)$ 处 $u=\varphi(x)$ 设

(1) $u=\varphi(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在且等于 a，即

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=a$$

(2) $y=f(u)$ 在点 $u=a$ 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时的极限也存在，且

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(a)$$

在一般高等数学教材中，对此定理均给出了证明，这里从略。

1　改变定理 1 中的条件，谈复合函数极限的存在性

由定理 1 知，对于任意给出的两函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$，如能满足条件(1)与条件(2)，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的极限一定存在。下面我们改变定理 1 中的条件，进一步讨论复合函数极限的存在性。

1.1　如条件(1)不变，将条件(2)改为“函数 $y=f(u)$ 当 $u\to a$ 时的极限存在”。这时复函数 $f[\varphi(x)]$ 极限是否存在？极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$、$\lim\limits_{u\to a}f(u)$ 以及函数值三者之间关系如何？下面以例题来回答上述问题。

例 1　设

$$y=f(u)=\begin{cases}u & u\neq 0\\ 1 & u=0\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

显然 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$ 存在，满足条件(1)，且有 $\lim\limits_{u\to 0}f(u)=0$ 也存在，即满足修改后的条件(2)，但复合函数

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0, x\neq\dfrac{1}{K\pi}\\ 1 & x=0, x=\dfrac{1}{K\pi}\end{cases}$$

(K 为非零整数)

的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$ 不存在(因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=1$ ($x=\dfrac{1}{K\pi}$)，而 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=0$ ($x\neq\dfrac{1}{K\pi}$)，二者不等)。

例 2　设

$$y=f(u)=\begin{cases}0 & u\neq 0\\ 1 & u=0\end{cases}$$

$$\varphi(x)=0\qquad x\ \text{为一切实数}$$

显然 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$ 存在，即满足条件(1)，并且有 $\lim\limits_{u\to 0}f(u)=0$ 也存在，即满足修改后的条件(2)，这时复合函数 $f[\varphi(x)]=1$ 的极限 $\lim\limits_{x\to 0}f[\varphi(x)]=1$ 存在，由 $\lim\limits_{a\to 0}f(u)=0$，$f(0)=1$，可知

$$\lim_{x\to 0}f[\varphi(x)]=f(0)\neq\lim_{u\to 0}f(u)$$

例 3　设

$$y=f(u)=\begin{cases}u & y\neq 0\\ 1 & u=0\end{cases}$$

$$u=\varphi(x)=x^2$$

显然复合函数

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}x^2 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

的极限存在且 $\lim\limits_{x\to 0}f[\varphi(x)]=0$，而 $f(0)=1$，$\lim\limits_{u\to 0}f(u)=0$。所以，该例反映了另一种结果，即

$$\lim_{x\to 0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to 0}f(u)\neq f(0)$$

由以上例题分析可知，减弱了定理 1 中的条件(2)后，复合函数的极限未必存在，即使复合函数的极限存在，也不可以随便用结论中的公式计算极限。这是因为 $y=f(u)$ 可能在 $u=a$ 处不连续，而使得 $\lim\limits_{u\to a_0}f(u)\neq f(a)$ 的缘故。

1.2　如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$ 不存在，$y=f(u)$ 在 $u=a$ 处不连续，即定理 1 中的条件都不满足，那么复合函

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

数的极限是否存在呢？

例4 设

$$y=f(u)=\begin{cases}1 & u\text{ 为有理数}\\ 0 & u\text{ 为无理数}\end{cases}$$

$$u=\varphi(x)=\begin{cases}1 & x\text{ 为有理数}\\ 0 & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

显然对任意点 x_0 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$ 都不存在，且 $y=f(u)$ 在任意点都不连续，但是，由于 x 无论取什么数 u 值都是有理数，故得 $y=f[\varphi(x)]=1$，因此极限

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=1$$

存在。也就是说，不满足定理1中的条件时，复合函数的极限还是可能存在的。因此，可以说定理1中的条件并不是复合函数的极限存在的必要条件。

2 依据定理1中的结论，谈求复合函数极限的方法

如果复合函数满足定理1中条件，那么复合函数的极限就可用结论中给出的公式进行计算。从公式的形式看，这时符号 $\lim\limits_{x\to x}$ 与 f 就可交换顺序，这给极限计算带来了方便。现以下面的例题给予说明。

例5 求 $\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}]$

解 应用定理1同时注意当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$。

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+\sin x)\\&=\lim_{x\to0}\ln(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}\\&=\ln[\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}]\\&=\ln[\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]\\&=\ln e=1\end{aligned}$$

例6 计算 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{4}{\sin x}}$

解 由

$$(\cos x)^{\frac{4}{\sin x}}=e^{\ln(\cos x)^{\frac{4}{\sin x}}}=e^{\frac{4}{\sin x}\ln\cos x}$$

根据定理1，同时注意到应用罗必塔法则，则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to0}e^{\frac{4}{\sin x}\ln\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to0}4\frac{\ln\cos x}{\sin x}}\\&=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{4}{\cos x}\cdot(-\frac{\sin x}{\cos x})}=e^0=1\end{aligned}$$

因为在许多情况下，复合函数的对应关系 f 不很"明显"，所以直接利用定理1中的公式计算复合函数的极限往往比较困难。下面改述定理1。

定理2 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，且当 $x\neq x_0$ 时 $\varphi(x)\neq a$（至少在 x_0 的某一个邻域内），则有

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A$$

证 因为 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，所以对任给的 $\epsilon>o$ 总存在 $\eta(\epsilon)>0$，当 $0<|u-a|<\eta$ 时，恒有 $|f(u)-A|<\epsilon$，又因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，所以对此 $\eta>0$，必存在 $\delta(\eta(\epsilon))>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|\varphi(x)-a|<\eta$，且 $0<|\varphi(x)-a|<\eta$，故当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f[\varphi(x)]-A|<\epsilon$，此即

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$$

需予指出，定理2中的条件也不是复合函数极限的必要条件，并且当 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$，$\lim\limits_{u\to\infty}f(x)=A$ 时，该结论仍成立。

定理2可提供复合函数求极限的一种方法，即变量代换法。

例7 计算 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$（$m,n$ 都是自然数）

解 令 $u=x^{\frac{1}{mn}}$，显然 $\lim\limits_{x\to1}u=1$，于是由定理2得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{u\to1}\frac{u^n-1}{u^m-1}\\&=\lim_{u\to1}\frac{(u-1)(u^{n-1}+u^{n-2}+\cdots+1)}{(u-1)(u^{m-1}+u^{m-2}+\cdots+1}\\&=\frac{n}{m}\end{aligned}$$

例8 计算 $\lim\limits_{x\to\pi}(1+3\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}$

解 令 $u=\mathrm{ctg}x$，$\lim\limits_{x\to\pi}\mathrm{ctg}x=\infty$ 应用定理2

$$\text{原式}=\lim_{u\to\infty}(1+\frac{3}{u})^u=\lim_{u\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{u}{3}}\right)^{\frac{u}{3}}\right]^3=e^3$$

例9 计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

解 令 $u=\sqrt{x}$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=0$，据定理2

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{u\to0^+}(\cos u)^{u^{-2}}\\&=\lim_{u\to0^+}[1+(\cos u-1)]^{\frac{1}{\cos u-1}\cdot\frac{\cos u-1}{u^{-2}}}\\&=e^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

（注：$\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\cos u-1}{u^2}=-\dfrac{1}{2}$）

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net