等式和不等式的概率证明

翁连贵

(南京电力高等专科学校, 南京, 210013)

在近几年的教学过程中,发现概率论独特的思考方法在等式和不等式的证明中有着特殊的作用,并且对有些问题的证明显然比其它的证法简洁。本文运用概率的有关性质和结论,证明几个等式和不等式。

1 等式的证明

利用概率证明等式的主要思想是构造古典概率模型(一般多为摸球问题),并计算有关事件的概率;同时还用到如下的几个概率性质

(1)独立性。若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立,则有

$$p(\prod_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n p(A_i)$$

(2)可加性。若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥,则有

$$p(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n p(A_i)$$

若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥,则有

$$p(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$$

(3)设 ξ 为离散型随机变量,其分布律为

$$p\{\xi = a_i\} = P_i, i = 1, 2, \dots,$$

则有

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$$

命题 1 设 $\varphi(n)$ 表示不大于 n 且与 n 互质的正整数的个数。证明 $\varphi(n) = n \prod (1 - \frac{1}{p})$, 其中乘积是在所有除得尽 n 的质数 p 上取的。

证明 考虑这样的问题,自数 $1, 2, \dots, n$ 中随机地取出一个来,计算它与 n 互质的概率。

我们知道,任一个自然数都可以分解成若干个质数的乘积,因此可设 $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$, 其中 $p_1, p_2, \dots, p_s$ 均为质数, $k_1, k_2, \dots, k_s$ 为正整数。又设

$$A = \{ \text{从 } 1, 2, \dots, n \text{ 中任取一数与 } n \text{ 互质} \}$$

$$A_i = \{ \text{从 } 1, 2, \dots, n \text{ 中任取一数与 } p_i \text{ 互质} \}, i = 1, 2, \dots, s$$

则显然有

$$A = A_1 A_2 \dots A_s = \prod_{i=1}^s A_i$$

又 $A_1, A_2, \dots, A_s$ 相互独立,从而有

$$P(A) = P\left(\prod_{i=1}^s A_i\right) = \prod_{i=1}^s P(A_i)$$

先求 $P(A_1)$, 易知基本事件总数为 n , 而除了 P_1 的倍数之外的其它数均与 P_1 互质, 故 A_1 中所含的基本事件的个数为 $n - \frac{n}{p_1}$, 所以由古典概率计算公式知

$$P(A_1) = \frac{1}{n} \left(n - \frac{n}{p_1}\right) = 1 - \frac{1}{p_1}$$

同理可得

$$P(A_i) = 1 - \frac{1}{p_i} \quad i = 2, 3, \dots, s$$

于是

$$P(A) = \prod_{i=1}^s P(A_i) = \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

另一方面, 因为 $\varphi(n)$ 为不大于 n 且与 n 互质的正整数的个数, 所以又有 $P(A) = \frac{\varphi(n)}{n}$, 从而

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

命题 1 得证。

$$\text{命题 2} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{12}$$

证明 考虑这样的问题, 若一个口袋里有一个黑球, 一个红球及一个白球, 现随机从袋中取球, 每次取出一个, 取后放回, 且再放回袋中一个红球, 依次进行, 求取出白球比黑球早的概率。

设 $A = \{\text{取出白球比黑球早}\}$, $A_k = \{\text{前 } k \text{ 次都取出红球, 第 } k+1 \text{ 次取出白球}\} (k=0, 1, 2, \dots)$, 显然, $A_0, A_1, A_2, \dots$ 两两互斥, 且 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$, 所以

$$P(A) = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k)$$

由古典概率计算公式易得 $P(A_0) = \frac{1}{3}$, $P(A_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$, $\dots$, $P(A_k) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \dots \cdot \frac{k}{k+2} \cdot \frac{1}{k+3} = \frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)}$, $\dots$, 于是

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \dots + \frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \dots \\ &= \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)} \end{aligned}$$

同理可得

$$P(\bar{A}) = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

因为 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, 所以 $\frac{2}{3} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)} = 1$, 即

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{12}$$

命题 2 得证。

命题 3 若 $N \geq m \geq 1$, 试证明

$$(I) \quad 1 + \frac{N-m}{N-1} + \frac{(N-m)(N-m+1)}{(N-1)(N-2)} + \dots + \frac{(N-m)\dots 2-1}{(N-1)\dots(m+1)m} = \frac{N}{m}$$

$$(II) \quad 1 + \frac{N-m}{N} \cdot \frac{m+1}{m} + \frac{(N-m)(N-m-1)}{N^2} \cdot \frac{m+2}{m} + \dots + \frac{(N-m)\dots 2-1}{N^{N-m}} \cdot \frac{N}{m} = \frac{N}{m}$$

$$(III) \quad 1 + \frac{N-m}{N+1} \cdot \frac{m+1}{m} + \frac{(N-m)^2}{(N+1)(N+2)} \cdot \frac{m+2}{m} + \frac{(N-m)^3}{(N+1)(N+2)(N+3)} \cdot \frac{m+3}{m} + \dots = \frac{N}{m}$$

证明 考虑这样的问题:若一个口袋里有 N 个球,其中有 m 个黑球,按如下三种方式取球,(1)每次取出一个,依次进行,取后不放回。

(2)每次取出一个,若不是黑球,则再放回袋中一个黑球,依次进行。

(3)每次取出一个,取后放回,若不是黑球则再放回袋中一个黑球,依次进行。

设 ξ 表示每次取到黑球所需次数,则 ξ 是一个随机变量,试分别求在上述 3 种情况下 ξ 的分布律。

先考虑(1),显然, ξ 的取值为 $1, 2, \dots, N-m+1$ 事件 $\{\xi=k\}$,表示前 $k-1$ 次没有取到黑球,而在第 k 次才取到,所以

$$P\{\xi=k\} = \frac{N-m}{N} \cdot \frac{N-m-1}{N-1} \dots \frac{N-m-K+2}{m-K+2} \cdot \frac{m}{N-k+1}$$

$$k = 1, 2, \dots, (N-m+1)$$

由分布律的性质 $\sum_{k=1}^{N-m+1} P\{\xi=k\} = 1$ 得

$$\frac{m}{N} + \frac{N-m}{N} \cdot \frac{m}{N-1} + \frac{N-m}{N} \cdot \frac{N-m-1}{N-1} \cdot \frac{m}{N-2}$$

$$+ \dots + \frac{N-m}{N} \cdot \frac{N-m-1}{N-1} \dots \frac{2}{m+1} \cdot \frac{1}{m} = 1$$

两边同除以 $\frac{m}{N}$,得

$$1 + \frac{N-m}{N} + \frac{(N-m)(N-m+1)}{(N-1)(N-2)} + \dots + \frac{(N-m)\dots 2-1}{(N-1)\dots(m+1)m} = \frac{N}{m}$$

命题 3-I 得证。

分别考虑(2)和(3),仿上可得命题 3-II, 3-III。

2 不等式的证明

利用概率证明不等式,主要思想是假设随机变量服从某种分布(一般为常用分布,如均匀分布,二项分布,泊松分布和正态分布等),再利用两个重要不等式。

2.1 詹森不等式

设 ξ 为随机变量,若 $f(x)$ 为凸函数,则有

$$f(E\xi) \geq E[f(\xi)]$$

若 $f(x)$ 为凹函数,则有

$$f(E\xi) \leq E[f(\xi)]$$

假设上述数学期望都存在。

2.2 柯西—许瓦尔兹不等式

设 ξ, η 为随机变量, 则有

$$[E(\xi\eta)]^2 \leq E(\xi^2)E(\eta^2)$$

假设上述数学期望都存在。

命题 4 (平均值定理)

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为 n 个正数, 则有

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \geq \sqrt[n]{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

证明 设 ξ 为取值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的离散型随机变量, 其分布律为 $\rho\{\xi = x_k\} = \frac{1}{n}, k = 1, 2, \dots, n$, 易知 $E\xi = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}x_k = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, 因为 $\ln x$ 为凸函数, 由詹森不等式有

$$\ln(E\xi) \geq E(\ln\xi)$$

所以

$$\begin{aligned} \ln\left[\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\right] &\geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln x_k = \frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n) \\ &= \frac{1}{n} \ln(x_1 x_2 \dots x_n) = \ln(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

由 $\ln x$ 的单调性有

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

命题 4 得证。

命题 5 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f''(x) \leq 0$, 证明 $\int_a^b f(x)dx \leq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

证明 此题一般的做法是用 $f(x)$ 在 $\frac{a+b}{2}$ 处的泰勒公式来证明, 比较麻烦, 下面我们这样来考虑。

设 ξ 为服从 $[a, b]$ 上的均匀分布, 即其分布密度为

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

易知 $E\xi = \frac{1}{2}(a+b)$

因为 $f''(x) \leq 0$, 所以 $f(x)$ 为凸函数, 故由詹森不等式, 有 $E[f(\xi)] \leq f(E\xi)$, 从而

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} f(x)dx \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

即

$$\int_a^b f(x)dx \leq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

命题 5 得证。

命题 6 证明当 $x > 0$ 时, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \frac{1}{1+x^2}$

证明 由不等式左边积分类型, 不难想到。

设 ξ 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 即其分布密度为 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad -\infty < x < +\infty$

易知 $E\xi = 0, \sigma^2\xi = 1$, 因为 $0 = E\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt$, 所以

$$-x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x (t-x)e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

从而

$$x \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x (x-t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-t)u(x-t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (*)$$

其中 $u(x-t)$ 为阶跃函数, 即

$$u(x-t) = \begin{cases} 1 & t \leq x \\ 0 & t > x \end{cases}$$

因 $x > 0$, 将 (*) 式两边平方得

$$\begin{aligned} x^2 &\leq \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-t)u(x-t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right]^2 \\ &= \{E[(x-\xi)u(x-\xi)]\}^2 \end{aligned}$$

由柯西—许瓦尔兹不等式, 有

$$\begin{aligned} x^2 &\leq E[(x-\xi)^2]E[(u(x-\xi))^2] \\ &= E(x^2 - 2x\xi + \xi^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [u(x-t)]^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= (x^2 - 2xE\xi + E\xi^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{aligned}$$

因为 $E\xi^2 = \sigma^2\xi + (E\xi)^2 = \sigma^2\xi = 1$, 所以

$$x^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \cdot (1+x^2)$$

故

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq \frac{x^2}{1+x^2}$$

从而

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq 1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

命题 6 得证。