第8卷第3期
1995年10月
盐城工业专科学校学报
Journal of Yancheng College of Technology
Vol. 8 No. 3
Oct. 1995

微元法新论

——兼论《高等数学及其应用》教材的使用效果

苏永法
（南京机械高等专科学校，南京，210013）

《高等数学及其应用》是南京机械高等专科学校机制专业“小范围，大涵度”教改试点（于1990年经省教科所立项，1994年获国家教委批准）系列教材之一，已连续试用了5届。这套教材于1995年5月被机械工业出版社列入选题计划，定为1996年秋季供书的教学用书。本文简介《高等数学及其应用》教材的使用效果，着重探讨教材所采用的微元法的特点。

1 《高等数学及其应用》教材的使用效果简介

使用本教材的教学效果可由以下事实反映。第一，将数学与应用相结合的教学很受学生欢迎。学生普遍反映，数学课上学的各种微积分的物理意义、各种建模的思想方法，对他们学习工程原理课大有帮助。第二，担任本试点班的专业基础课和专业课的老师普遍肯定本课程的改革。他们在教学中发现试点班的学生比普通班的学生对工程原理的理解力有明显的提高。第三，1994～1995学年，我校举办全校本、专科纯数学混合竞赛，试点班参赛学生中有一名夺得全校第一名，获一等奖，还有一名学生获三等奖。后来我请夺得全校第一名的学生介绍应试措施时，他说：“我什么参考书也没有看，就看《高等数学及其应用》这套教材，不过去年学习的上册，这次又看了三遍”。以上三个事实，说明了本教材将“数学的应用教学”和“数学的基础教学（数学的素质教学）”在大专水平的教学上得到了新的统一。

本教材不是在传统数学教材上加几个数学应用的例子，而是在全教材通过大量应用微元法，对数学及其应用在大专水平的教学上进行融合（相互渗透，密切结合）作新的尝试。这也正是本教材为了在有限的教学时数内既要增加大量的工程（原理）应用题材，又要保住必要的数学基础所采取的重大措施。

2 《高等数学及其应用》教材中的微元法

本教材中的微元法是根据工程学家的数学思想提炼出来的，有别于目前教材上所见到的微元法，故名为微元法新论。

微元法新论，新在何处？本教材中的微元法对用微元法求导、建立积分式、建立微分方程，对用微元法研究微积分的其他问题（如弧微分公式，函数的升降，凸凹等等）给出了统一的思考方法。因而，本教材的微元法是贯串教材始终的研究数学及其应用的主要方法之一。而目前一些教材上，当用微元法建立积分式时，用函数 $y=f(x)$ 在子区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上的增量 Δy 的线性主部 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 去近似代替增量，即 $\Delta y\approx f(x)+f'(x)\mathrm{d}x\cdots$；当用微元法建立微分方程时，又将函数 $f(x)$ 在点 $(x+\mathrm{d}x)$ 上进行泰勒展开，再略去泰勒级数中的二阶以上小量，取近

似等式 $f(x+\mathrm{d}x)\approx f(x)+f'(x)\mathrm{d}x$。这就要求函数在所论的区间上$(n+1)$阶可导，未免太苛刻。另外，在应用中常遇到几个函数积的问题。在这种问题中，几个线性近似函数积的展开式中又出现了高阶小量，因而又需略去。这种一而再，再而三地略去高阶小量，往往使读者误认为微元法是一种近似方法。也许微元法有此"缺点"，因此目前在工科数学教材中，微元法的应用相当有限。

为了使微元法新论表述更为简明直观，本文先提一下关于无穷小量的非标准分析概念。

目前，国内外非标准分析的流派很多，在众多流派中，我最欣赏哈尔滨工业大学的王泽汉教授运用辩证逻辑提出的非标准分析关于无穷小量的学说，请参见《数学分析基础》(黑龙江科学技术出版社出版)。

对于数列　$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{2^{n-1}},\cdots$　其中　$x_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ 随着 n 增大，越来越接近于0，但永远达不到0。

王泽汉问："$x_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ 永远达不到0，它究竟达到什么？"他答："x_n 最后达到 0^*"。并提出了 x_n 的终值概念，记 $\mathrm{fin}x_n=0^*(>0)$。fin 意为最终。

王称 0^* 为无穷小量，并将 $|0^*|$ 定义为大于0又小于一切正实数的数。这里需作三点注释：第一，符合该定义的无穷小量不止一个，有无穷多个，王均以 0^* 表示。第二，显然该定义违背形式逻辑。因为小于一切正实数的最大的数为0，怎么 $0>0$? 但根据类似上述数列的发展，辩证逻辑承认定义中的矛盾判断是真实的。在近代非标准分析中，这个形式上的矛盾是通过将实数系扩充为超实数系来解决的。在王泽汉笔下，若变量 Δ 趋于零的终值 $\mathrm{fin}\Delta x=0^*$，则无穷小量 Δx 记为 $\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x=0^*$，在莱布尼兹的微商 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 概念中的 $\mathrm{d}x$ 就是这种无穷小量。第三，以现代非标准分析的观点看，0为一切 0^* 的标准值。0亦为无穷小量，但王泽汉认为0为静止量，0^* 为动态量。

应当指出，无穷小量 0^* 的这种"0与非0"的矛盾对立统一性，正是工程学科中所取微元体的空间性质的反映。例如，在研究梁的弯曲变形时，沿着梁的中性轴线，从点 x 取出的微元梁 $\mathrm{d}x$，其位置只能在点 x 上，其大小具有零的性质。但所取的微元梁 $\mathrm{d}x$ 又必需具有母体的弹性等宏观物理性质，因此，其大小又必需具有非零性质。在物理上讲，在 $\mathrm{d}x$ 的长度内大约需要排列 10^{10} 个原子。因此，非标准分析对无穷小 0^* 的认识是工程学中所取微元体大小的客观反映。

最后要说明的是在本教材中没有使用非标准分析的术语，这是接受我的一位老师根据目前国内大学数学教学的实际情况所提建议，因此，教材中的无穷小量概念仍为趋于零的变量。

3　微元法新论及必要的非标准解释

3.1　关于邻点概念及其非标准解释

定义1　相距无穷小的两个点称为邻点。

邻点概念已见于理工科大学多种教材。例如，[日]佐佐木重夫著，苏步青译《微分几何》中"切线是通过曲线上两个邻点的直线"。在力学教材上，将分别过两邻点的平行平面称为相邻的两平面。引用非标准分析概念，那么在一维空间中，点 x 的邻点就是 $x+0^*$，它是流变量 $x_1\rightarrow x$ 的极限中，x_1 所能达到的"终极位置"。我们将 $x+0^*$ 称为 x 的左邻点，$x+0^*_+$ 为点 x 的右邻

点。在工程学中，常将 x 的邻点记为 $x+\mathrm{d}x$ 有时也将 $x-\frac{\mathrm{d}x}{2}$ 和 $x+\frac{\mathrm{d}x}{2}$ 作为邻点。

3.2　关于等价相等概念

定义 2　若在无穷小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上两个变量 $A(\mathrm{d}x)$，$B(\mathrm{d}x)$ 同号，且

$$\frac{A-B}{\mathrm{d}x}\to o,\qquad \text{或}\quad \frac{A-B}{\mathrm{d}x}=\epsilon(\text{无穷小})$$

则 A 与 B 在 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上等价相等，记为 $A\simeq B$。

例如，由微分学可知，若函数 $y=f(x)$ 在点 x 可微，则

$$\frac{f(x+\mathrm{d}x)-[f(x)+f'(x)\mathrm{d}x]}{\mathrm{d}x}\to 0 \tag{1}$$

由定义 2 可知

$$f(x+\mathrm{d}x)-f(x)\simeq f'(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

不难证明式(2)两端恒为同号，即使在应用中两端减去等量后，仍为同号，符合定义 2。

在应用中，本教材采用工程学惯例，将等号"="代替等价相等号"$\simeq$"，于是式(2)写成

$$f(x+\mathrm{d}x)-f(x)=f'(x)\mathrm{d}x \tag*{(2)$'$}$$

式(2)′的几何直观意义是在 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上曲线已转化为直线。

另一方面，由微分学可知，等价等式(2)′是由略去高阶无穷小 $O(\mathrm{d}x)$ 获得的。因此，我们可凭在极限变化过程中，高阶无穷小比低阶无穷小趋于零的速度快这一直观意义，又可将式(2)′看作极限水平上的等式，或省略了极限号的等式。

3.3　关于微元概念及函数的微元结构

定义 3　变量的无穷小变化单元称为该变量的微元。

设 $(x+\mathrm{d}x)$ 为点 x 的邻点，则 $\mathrm{d}x$ 为 x 变化的无穷小变化单元，因此称 $\mathrm{d}x$ 为 x 的微元，称 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 为微元区间。式(2)′表示 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 为函数 y 的无穷小变化单元，故称 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 为函数 y 的微元。工程学上还常使用等价等式

$$f(x+\mathrm{d}x)=f(x)+f'(x)\mathrm{d}x \tag*{(2)$''$}$$

将式(2)″推广到多元函数时，有等价等式

$$f(X+\mathrm{d}X)=f(X)+\nabla f(X)\cdot\mathrm{d}X \tag{3}$$

式中　$X=\{x,y,\cdots,z\}$

尽管式(2)成立的条件只需 $f'(x)$ 存在，但实际应用中函数微元 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 的结构是连续函数 $f'(x)$ 与自变量微元 $\mathrm{d}x$ 之积。由此结构可知，只有光滑函数，才能取其微元。工程学中的函数，或者是光滑的(包括分段光滑)，或者可假定是光滑的，数量很多，故在工程学中大量采用微元法。

将 $\mathrm{d}y$ 看作函数 y 的微元，这一数学思想的重要实用价值还在于在应用中，往往函数 y 是未知的，因此无法求出它的改变量 $\delta y=f(x+\mathrm{d}x)-f(x)$，亦即无法用极限方法求其导数。但人们能根据已掌握的知识正确地写出它的微元 $\mathrm{d}y$，工程学上常通过下面的式(4)，求出未知函数的导数。

3.4　函数的微元变化模式

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 光滑，当自变量 x 变化一个微元 $\mathrm{d}x$ 时，函数 y 也变化一个微元 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，这称为函数的微元变化模式，其变化率为

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}y(\text{因变量的微元})}{\mathrm{d}x(\text{自变量的微元})} \tag{4}$$

显然式(4)与中学物理中讨论的均匀变化过程的变化率公式十分相似。可见*在微元上，非均匀变化已转化为均匀变化*。于是可在微元上使用中学物理公式中的物理概念来研究大学课程中的一些非均匀变化问题。这一数学思想方法易为学生理解和掌握，这就是我们之所以能在数学课上讲大学应用问题时与中学物理接轨的道理。这种教学法在普遍削弱物理理论课的工程专科教育中具有普遍的实践价值。

3.5 微元法新论中的推理逻辑

定理1　设 A、B 均为仅与 x 有关而与 $\mathrm{d}x$ 无关的实数，且 A、B 在微元区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上等价相等，$A \simeq B$，则 $A = B$ 精确成立。

证(用反证法)　由实数绸密性理论可知，若 A 与 B 在微元区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上非精确相等，则 $(A-B)$ 是一个不等于零的实数，不是无穷小，因而

$$\frac{A-B}{\mathrm{d}x} \to \infty$$

即 A 与 B 非等价相等，与题设相矛盾。定理得证。

定理2　设函数 $y = y(x)$ 可微，又 A、B 均为仅与 x 有关而与 $\mathrm{d}x$ 无关的实数，若在微元区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上存在两个微元等价相等，$A\mathrm{d}y \simeq B\mathrm{d}x$，则 $A\mathrm{d}y = B\mathrm{d}x$ 精确成立。

证　因为 $A\mathrm{d}y \simeq B\mathrm{d}x$，又 $\mathrm{d}x \neq 0$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \simeq \frac{B}{A}$$

由式(4)或知，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是函数 y 的变化率，是实数。所以由定理 1 可知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{B}{A} \qquad \text{精确成立}$$

从而

$$A\mathrm{d}y = B\mathrm{d}x \qquad \text{也精确成立}$$

证毕。

由定理 1 和定理 2 可知，微元法新论中的数学推理逻辑是：“*由等价等式推出的等式仍为等价等式，但当推出两个微元等价相等，或两个实数等价相等时，该等价等式即为精确等式*”。这就是用微元法求精确解的基本原理。由该原理易知，在应用中将等号“$=$”代替等价相等号“$\simeq$”，不仅不会引起混乱，而且是极为方便的，全部工程学实例也证实了这一点。

3.6 微元区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的非标准解释

微元分析法为什么是与极限方法等价的精确求解方法？因为在微元区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 中实际上只有一个实数点 x。这只需根据莱布尼兹的观点，用王泽汉的符号，令 $\mathrm{d}x = 0^*$，于是微元区间 $[x, x+0^*]$ 中只含一个实数点 x 的直观意义就显得十分清晰。因此，微元区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 是退化为一点的子区间。这句话同样是一种矛盾判断，只有辩证逻辑才能确认它是真实的。但是从近代非标准分析的观点看，也是不难理解的：说 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 是一个“点”，是因为它只含一个标准点 x，说 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 是一个区间，是因为它除含有一个标准点 x 外，还含有无穷多个非标准点 $x+0^*$ (0^* 有无穷多个)。由于微元区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 具有“点”和“区间”的双重性质，因此，可使用等价等式来研究函数在微元区间上的变化。在微元分析的推演中，使用等价等式，也称等价变换。我们将类似由式(2)′ 自左向右的变换(略去高价无穷小量的运算) 称为正(等价)变换，反之称为逆(等价)变换。在微元分析的推演过程中有时正、逆(等价)变换需交

替进行。其中正(等价)变换的作用,相当于标准分析中的取极限,也相当于非标准分析中的标准化。因此,所得结果即为函数在点 x 上的变化结果。也就是说,微元分析法也是一种直接的“点分析”技术,是与极限方法等价的精确求解方法。

3.7 **举例**

(1) 建立积分式

题 设电容为 C 的平板电容器在充电过程中极间电压由 0 增加到 U,求极间电场能。

解 因为在充电过程中,电容极间电压是时间 t 的函数 $u=u(t)$,故中学物理关于静电场中的电场力的电功公式 $W=qU$ 不再适用。但是由函数的微元变化模式可知,电功元 dW 对电量元 dq 仍是均匀变化的,即 dW 仍为 dq 的线性函数,于是

$$dW = 电量 \times 压降 = u dq$$

这一步称为在微元上使用中学物理公式,再利用中学物理中的电容公式 $Q=CU$,即可得到充电电容的极间电场能量元

$$dW = u dCu = Cu du$$

于是所求电场能为

$$W=\int_0^U Cu du$$

上述建模的分析法,称为微元分析思维模式。这种思维模式不仅能反映事物积分变化的结果,而且还能较直观地反映事物积分变化的过程。

(2)用微元法求导

对未知函数的求导问题,现行高等数学教材是避而不谈的,但在工程学上是常见的。下面我们来求流体中微元体的切变角速率 $\frac{d\alpha}{dt}$。

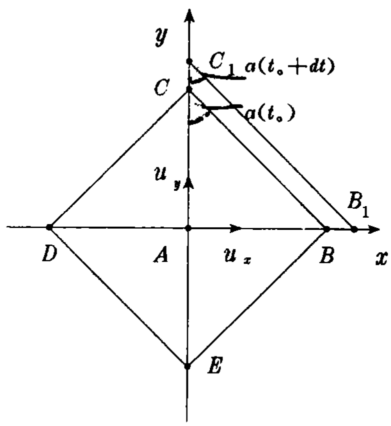

图 1 从流场中取微元体

设在 t_0 时刻,从流场中点 A 处取出正方微元体 $BCDE$。如图 1 建立坐标,u_x、u_y 分别为点 A 的流速分量,流体角 $\alpha(t_0)=\angle ACB=\frac{\pi}{4}$。显然,由于流体的流动,$\alpha=\alpha(t)$ 是 t 的未知函数。下面通过研究 AB、AC 的变形来求变化率 $\frac{d\alpha}{dt}$。

设在 t_0 时刻,$AB=AC=ds$,则 $BB_1=\frac{\partial u_n}{\partial x}dsdt$, $CC_1=\frac{\partial u_y}{\partial y}dsdt$

$$\therefore \mathrm{tg}\alpha(t_0+dt)=\mathrm{tg}\angle AC_1B_1=\frac{AB_1}{AC_1}=\frac{ds+\frac{\partial u_x}{\partial x}dsdt}{ds+\frac{\partial u_y}{\partial y}dsdt}\overset{(1)}{=}1+\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)dt$$

而 $$d\alpha\overset{(2)}{=}\alpha(t_0+dt)-\alpha(t_0)=\alpha(t_0+dt)-\frac{\pi}{4}\overset{(3)}{=}\mathrm{tg}\left[\alpha(t_0+dt)-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\mathrm{tg}\alpha(t_0dt)-1}{1+\mathrm{tg}\alpha(t_0+dt)}=$$

$$\frac{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)dt}{2+\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)dt}\overset{(4)}{=}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)dt$$

(下转第56页)

应配备几辆卡车？

解　由题意分析，这是一个$(M/M/C):(N/N/G)$模型，即多服务员的机器看管问题模型。$r=1/3,\mu=6,C=2$。此时

$$P_0=\left[\sum_{n=0}^{c}\frac{N!}{(N-n)!n!}(\frac{r}{n})^n+\sum_{n=c+1}^{N}\frac{N!}{(N-n)!C!C^{n-c}}(\frac{r}{\mu})^n\right]^{-1}$$

且有

$$\begin{cases}P_n=\dfrac{N!}{(N-n)!n!}(\dfrac{r}{\mu})^nP_0 & \text{当 } 0\leqslant n\leqslant C;\\ P_n=\dfrac{N!}{(N-n)!C!C^{n-c}}(\dfrac{r^n}{\mu})P_0 & \text{当 } C\leqslant n\leqslant N\end{cases}$$

分别对不同的$N(N=13,14,\cdots)$，计算出在该卡车配备数N的条件下正在修理或等待修理的卡车数的概率分布$P_n(n=0,1,2,\cdots,N-12)$，并以下式计算参加运输的卡车数$Q\geqslant12$的概率：

$$P\{Q\geqslant12\}=\sum_{n=0}^{N-12}P_n$$

当计算到某个N满足$P\{Q\geqslant12\}>0.97$时，即得到所求的卡车配备数量。本例计算至$N=15$时，$P\{Q\geqslant12\}=0.9762$，即该矿山至少应配备 15 辆卡车。

通过以上一些分析，可以发现停留费用是可以考虑的，在排队论中可以实行运行指标好，结构合理的服务系统，随着电算技术的发展，以前不能用分析法解决的排队问题，可以用电子计算机模拟获得经验公式，相信排队论将会被越来越广泛地应用于经济管理活动中。

参考文献

1　陆凤山编著．排队论及其应用．科学技术出版社
2　[日]OR 演习部会编．运筹学教程
3　滕传琳主编．管理运筹学．中国铁道出版社
4　李吉桂，王汉强编著．线性规划法．科普出版社

(上接第 82 页)

从而

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{\partial u_y}{\partial y})$$

在上述推导中，等号(1)、(2)、(3)、(4)均为等价相等号，其中(2)、(3)是逆变换，(1)、(4)为正变换。由于等号(2)的左端和等号(4)的右端出现两个微元等价相等，所以由微元法新论的推理逻辑可知，所得结果是精确的。

4　结束语

教学实践证明，在工科大专水平的教学上，扩大微元法的应用有利于在有限的教学时数内，将数学的基础教学与应用教学更紧密结合起来，达到既能提高学生的数学应用能力，又能使学生打好必要的数学基础的目的。

由于工程学中从一点处取出的微元体是实无穷小。因此，在讲解微元法时，适当介绍非标准分析关于无穷小的概念，有利于扩大学生的知识面，活跃学生思维，加深对微元法的理解。