

递归定义下行列式性质的证明

徐平亚

(南京电力高等专科学校, 南京, 210013)

摘 要 本文利用 n 阶行列式的二次展开式给出递归定义下行列式 Laplace 展开定理的一个简化证明。

关键词 递归法 行列式 余子式

分类号 O151.22

在用递归法(降阶法)定义行列式时,完整地证明行列式的基本性质是困难的,有些教材为此花费了较多篇幅(如文^[1]),更多的是对行列式的两个基本性质(转置、换行)避而不证。

本文试图在行列式的递归定义下给行列式的按行(列)展开定理以一个相对简短的证明,在此基础上可比较容易地严格证明行列式的全部常见性质。

定义 定义一阶行列式 $|a| = a$ 。设 $n-1$ 阶行列式已有定义,则定义 n 阶行列式 D 为

$$D = \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{1i} M_{1i}$$

这里 $n-1$ 阶行列式 M_{1i} 是 D 中元素 a_{1i} 的余子式。

定理 行列式等于它任一行(或列)的诸元素与对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

证明 用归纳法, $n=2$ 时的命题显然成立。设定理对 $n-1$ 阶行列式成立,令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由定义

$$D = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}$$

对任意 $2 \leq i \leq n$, 命

$$D' = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

则只需证明 $D = D'$ 。

注意到 M_{1j}, M_{ij} 都是 $n-1$ 阶行列式,依定义将 M_{ij} 按第一行展开,再由归纳法假设将 M_{1j} 按第 $i-1$ 行(注意该行中元素是原行列式 D 中位于第 i 行的元素)展开;则 D 与 D' 均为 $n(n-1)$ 个 $n-2$ 阶行列式的线性组合。以上两和式中每一项均为 D 中位于第一行和第 i 行的两个不同列元素与 D 的划去这两个元素所在行列的 $n-2$ 阶余子式之积再冠以一个符号,记 $M(r_p, r_q; c_s, c_t)$ 为 D 中划去第 p, q 行和第 s, t 列后所余 $n-2$ 阶余子式; (下转第 91 页)

(p_1, p_2) , 则接收原假设 $H_0: p = p_0$.

4 两个例子

例1 5名学生彼此独立地测量同一块土地, 分别测得其面积(km^2)是 1.27, 1.24, 1.21, 1.28, 1.23, 设测定值服从正态分布, 试根据这些数据检验: H_0 . 这块土地的实际面积是 1.23 ($\alpha = 0.05$).

解 本题要求在水平 $\alpha = 0.05$ 下, 检验 $H_0: E(x) = 1.23$, 由计算得 $\bar{x} = 1.246$, $S = 0.02881$. 本问题属于方差未知对总体均值 $E(x)$ 进行检验的问题. $E(x)$ 的置信度是 0.95 的置信区间是 $(\bar{x} - \lambda \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \lambda \frac{S}{\sqrt{n}})$, 查表得 $\lambda = 2.7764$, 代入数字得: (1.21, 1.282), 1.23 $\in$ (1.21, 1.282), 所以接受 $H_0: E(x) = 1.23$.

例2 两正态总体 $N(u_1, \sigma_1^2)$, $N(u_2, \sigma_2^2)$ 的参数都未知, 依次取容量是 25, 15 的两独立样本, 测得样本方差是 6.38, 5.15, 要求在 $\alpha = 0.01$ 下检验 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

解 $F(n_1 - 1, n_2 - 1) = \frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2}$, 令 $p\{\lambda_1 < \frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2} < \lambda_2\} = 1 - \alpha$, $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度是 0.99 的置信区间是 $(\frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2}, \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2})$, $\lambda_1 = F_{1-\frac{\alpha}{2}}(24, 14)$, $\lambda_2 = F_{\frac{\alpha}{2}}(24, 14) = \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(24, 14)}$, 查表得 $\lambda_1 = 0.4695$, $\lambda_2 = 2.64$. 代入数字得 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度是 0.99 的置信区间是 (0.528, 2.64), $1 \in (0.528, 2.64)$, 所以接收 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, 认为两正态总体的方差无显著差异.

几点说明: 以上讨论的是几种情况下的假设检验用区间估计去代替的思想方法, 用这些方法去完成假设检验的任务同样也会犯两种错误, 即“拒真”和“纳伪”, 在此就不多讨论了, 另外关于参数的单侧检验用区间估计的方法去代替的问题, 限于篇幅, 在此也不讨论了.

参考文献

- 1 浙江大学数学系编. 概率论与数理统计. 人民教育出版社. 1979 年
- 2 华师大数学系编. 数理统计讲义.
- 3 费定晖, 费荣昌编. 概率统计. 山东科学技术出版社.

(上接第 92 页)

则 D 中含 a_{1k}, a_{im} (不妨设 $k > m$) 的项为

$$(-1)^{1+k} a_{1k} (-1)^{(i-1)+r} a_{im} M(r_1, r_i; c_k, c_m)$$

D' 中含此二元素的项为

$$(-1)^{i+m} a_{im} (-1)^{1+(k-1)} a_{1k} M(r_i, r_1; c_m, c_k)$$

显然上述两式是相等的, 从而 $D = D'$.

对列的证明与此相仿.

这样就可以利用行列式的按行按列展开定理证明行列式的性质 (见文^[2]).

参考文献

- 1 兰以中编. 线性代数引论. 北京大学出版社. 1981
- 2 周亿行, 郭景德, 刘浩荣编. 线性代数与数理方程. 中国建筑工业出版社. 1989