$[a,b]$区间上函数的傅立叶展开

周恒亮
（连云港化工高等专科学校，连云港，222001）

摘　要　本文仅从区间变换和变量变换两个方面给出函数在$[a,b]$区间上的傅立叶展开式。

关键词　区间　狄氏条件　延拓　变换　傅立叶展开

同济大学编《高等数学》第三版 P339 例 3 为“将函数$f(x)=10-x(5<x<15)$展开成傅立叶级数”，它具体给出了$[a,b]$区间上函数的傅立叶展开的示例。事实上，对于非周期函数$f(x)$，除区间$(-\infty,+\infty)$外，在有限区间$[a,b]$上只要满足狄氏条件，皆可经延拓后而傅氏展开。在此仅给出关于区间和变量变换的展开法。

1　将$[a,b]$化为$[a,a+2l]$形式，其中$l=\frac{b-a}{2}$

经区间变换，即得

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\frac{b-a}{2}}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\frac{b-a}{2}}\right),\quad x\in[a,b] \tag{1}$$

其中

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{\frac{b-a}{2}}\mathrm{d}x\qquad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{\frac{b-a}{2}}\mathrm{d}x\qquad n=1,2,\cdots \tag{2}$$

2　在$[a,b]$上作变换$z=x-\frac{b+a}{2}$

此时$[a,b]$上的$f(x)$展开就化为$[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}]$，即$[-l,l]$($l=\frac{b-a}{2}$)上的$F(z)$的展开，且有

$$f(x)=f(z+\frac{b+a}{2})=F(z)$$

因此

$$F(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\frac{b-a}{2}}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\frac{b-a}{2}}\right),\quad x\in[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}] \tag{3}$$

其中

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_{\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}}F(z)\cos\frac{n\pi x}{\frac{b-a}{2}}\mathrm{d}x\qquad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} F(z)\sin\frac{\frac{n\pi x}{b-a}}{2}\mathrm{d}x \quad n = 1,2,\cdots \tag{4}$$

最后将 $z = x - \frac{b+a}{2}$ 代回，在 $x \in [a,b]$ 上，故得

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos\frac{\frac{n\pi x}{b-a}}{2} - \frac{b+a}{b-a}n\pi) + b_n\sin(\frac{\frac{n\pi x}{b-a}}{2} - \frac{b+a}{b-a}n\pi)] \tag{5}$$

注意，上面两种方法中，a_0 一般分开求较妥。

3 将 $f(x) = 10 - x, (5 < x < 15)$ 傅氏展开。

解法 1 将(5,15)看成 $(a, a+2l)$，可知 $a = 5, l = \frac{15-5}{2} = 5$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\cos\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5}[10\times\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5} - x\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5} - \frac{5^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{5}]_5^{15} \\
&= \frac{1}{5}[0 - 0 - \frac{5^2}{n^2\pi^2}\cos 3n\pi - 0 + 0 + \frac{5^2}{n^2\pi^2}\cos n\pi] \\
&= 0 \qquad\qquad n = 0,1,2,\cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\sin\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5}[-10\times\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5} + x\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5} - \frac{5^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{5}]_5^{15} \\
&= \frac{1}{5}[-\frac{50}{n\pi}\cos 3n\pi + \frac{75}{n\pi}\cos 3n\pi - 0 + \frac{50}{n\pi}\cos n\pi - \frac{25}{n\pi}\cos n\pi + 0] \\
&= \frac{1}{5}\times\frac{50}{n\pi}\cos n\pi \\
&= \frac{10}{n\pi}(-1)^n \qquad\qquad n = 1,2,\cdots
\end{aligned}$$

故

$$10 - x = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}, \qquad x \in (5,15)$$

注意，由于此题的函数及区间构成的特殊性，在解法一中求 a_n 及 b_b 时，可令 $t = 10 - x$，即有

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\cos(\frac{n\pi x}{5})\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int_5^{-5}t\cos(2n\pi - \frac{n\pi t}{5})\mathrm{d}(-t) \\
&= \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}t\cos\frac{n\pi t}{5}\mathrm{d}t = 0 \qquad\qquad n = 0,1,2,\cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\sin\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int_5^{5}t\sin(2n\pi - \frac{n\pi t}{5})\mathrm{d}(-t) \\
&= -\frac{1}{5}\int_5^{5}t\sin\frac{n\pi t}{5}\mathrm{d}t = \frac{-2}{5}\int_0^5 t\sin\frac{n\pi t}{5}\mathrm{d}t = \frac{10}{n\pi}(-1)^n \qquad\qquad n = 1,2,\cdots
\end{aligned}$$

解法 2 作变换 $z = x - \frac{5+15}{2} = x - 10$。

作此变换，即化 $f(x)=10-x, x\in(5,15)$ 为 $(-5,5)$ 上 $f(x)=f(z+10)=F(z)=-z$ 情形，参见图 1、图 2。而 $F(z)=-z$ 在 $z\in(-5,5)$ 上为奇函数，故 $a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{15-5}\int_{-\frac{15-5}{2}}^{\frac{15-5}{2}}F(z)\sin\frac{n\pi z}{\frac{15-5}{2}}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2}{5}\int_0^5(-z)\sin\frac{n\pi z}{5}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{10}{n\pi}(-1)^n \qquad n=1,2,\cdots$$

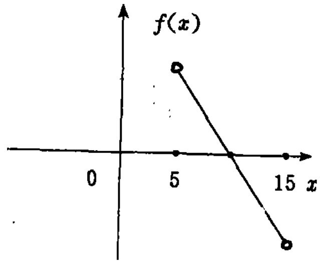

图 1

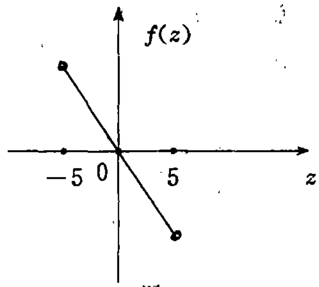

图 2

因此

$$F(z)=-Z$$

$$=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi z}{5} \qquad z\in(-5,5)$$

最后将 $z=x-10$ 代回，故得

$$f(x)=10-x$$

$$=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi z}{\frac{b-a}{a}}\left(x-\frac{b+a}{2}\right)$$

$$=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{5}-2n\pi\right)$$

$$=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{5} \qquad x\in(5,15)$$

附延拓后傅氏级数的和函数 $s(x)$ 如图 3。

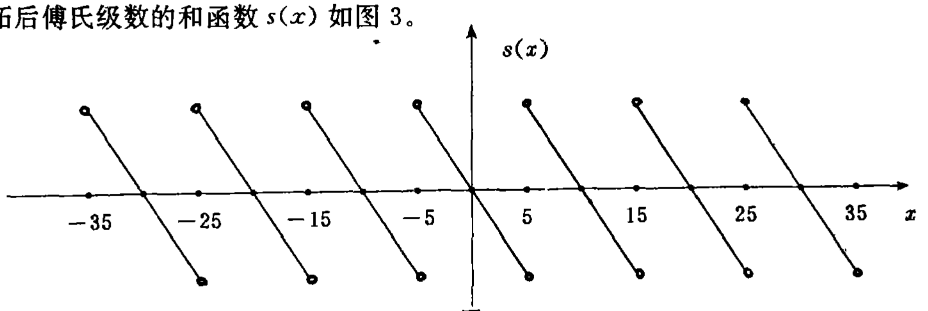

图 3

参考文献

1　同济大学．高等数学．第三版．1988

2　格. 马菲赫金哥尔茨，丁寿田译．数学分析原理．1962

3　丁家泰．微分解题方法(续)．1985

4　吕源熙等编．高等数学的理论与方法．1987