

常系数线性微分方程的一种简便解法

黄振明 吴 平

(苏州职工大学, 苏州, 215000)

摘 要 本文对二阶常系数线性微分方程利用积分因子降阶法, 给出了一种简便解法, 并可推广到高阶线性微分方程。

设二阶常系数线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$$

其中 p, q 是已知常数。若 $f(x) \equiv 0$, 则称为相应于(1)的齐次方程, 即

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (2)$$

方程(2)的特征方程为

$$r^2 + pr + q = 0$$

方程(3)的两根为 r_1, r_2 , 则有

$$r_1 + r_2 = -p$$

$$r_1 \cdot r_2 = q$$

利用积分因子 $e^{-r_1 x}$ 对方程(1)进行降阶, 于是有

$$[e^{-r_1 x}(y' - r_2 y)]' = f(x) \cdot e^{-r_1 x} \quad (4)$$

对(4)式两边同时积分得

$$y' - r_2 y = e^{r_1 x} \int f(x) e^{-r_1 x} dx \quad (5)$$

继续运用积分因子降价法, 从(5)式可立即得到方程(1)的解。^{*}

下面我们举实例来进一步阐述其思想和方法。

例1 求方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ 的通解。

解 其相应的特征方程为

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

其根为 $r_1 = 1, r_2 = 2$, 从(5)得

$$y' - 2y = e^x \int x dx = \frac{1}{2} x^2 e^x + c_1 e^x$$

继续利用积分因子降价法, 可得原方程的通解为

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2} x^2 + x + 1\right) e^x$$

其中 c_1, c_2 为任意常数。

* 若 $f(x) \equiv 0$, 由(5)知, $y' - r_2 y = c_1 e^{r_1 x}$ (c_1 为任意常数)。于是, 我们根据 r_1 和 r_2 的三种不同情形 (r_1, r_2 为不相等的实数, $r_1 = r_2$, 与 r_1, r_2 为共轭复根) 易获得齐次线性微分方程的通解公式。

例2 求方程 $y'' + y = e^x \cos x$ 的通解。

解 其相应的特征方程为

$$r^2 + 1 = 0$$

其根 $r_1 = i, r_2 = -i$, 从(5)式有

$$y' + iy = e^{ix} \int e^{(1-i)x} \cos x dx = \frac{e^x}{2(1-2i)} [(1-2i)e^{ix} + e^{-ix}] + c_1^* e^{ix}$$

两式同时乘以积分因子 e^{ix} , 得到复系数的解为

$$y^* = \frac{c_1^*}{2i} e^{ix} + c_2^* e^{-ix} + \frac{1}{5} e^x (\cos x + 2\sin x)$$

取 y^* 的实部, 所以原方程的通解为

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{1}{5} e^x (\cos x + 2\sin x)$$

其中 c_1, c_2 为任意实数。

例3 求方程 $y''' - 2y'' + y' = 2e^{-x} + 3x^2 + 1$ 的通解。

解 其相应的特征方程为 $r^3 - 2r^2 + r = 0$, 即

$$r(r-1)^2 = 0$$

其特征根为 $r_1 = 0, r_2 = r_3 = 1$ 。对其高阶方程, 利用本文中积分因子降阶法, 得到

$$(y'' - 2y' + y)' = 2e^{-x} + 3x^2 + 1 \quad (6)$$

对(6)式两边同时求积分, 有

$$y'' - 2y' + y = -2e^{-x} + x^3 + x + c_1 \quad (7)$$

利用积分因子 e^{-x} , 从(7)式得

$$[e^{-x}(y' - y)]' = (-2e^{-x} + x^3 + x + c_1)e^{-x} \quad (8)$$

对(8)式两边再积分, 有

$$e^{-x}(y' - y) = e^{-2x} - (x^3 + 3x^2 + 7x + 7)e^{-x} - c_1 e^{-x} + c_2 \quad (9)$$

对(9)式, 利用积分因子降阶法, 得

$$e^{-x}y = -\frac{1}{2}e^{-2x} + (x^3 + 6x^2 + 19x + 26)e^{-x} + c_1 e^{-x} + c_2 x + c_3$$

从而获得原方程的通解为

$$y = x^3 + 6x^2 + 19x + 26 - \frac{1}{2}e^{-x} + c_1 + (c_2 x + c_3)e^x$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意实数。

从上述例子中可见运用二阶或高阶线性微分方程的积分因子, 把方程逐步“降阶”, 因而能较容易地求得原方程的解。此方法优点还在于: (1) 统一地处理了常系数线性微分方程的求解问题, 对非齐次项几乎不加限制, 其方法增加了选用性。(2) 简化计算, 求解过程做到了条理化、程序化, 便于掌握运用, 计算只用到了不定积分。(3) 此方法也适用于高阶常系数线性微分方程。(4) 利用线性微分方程解的结构理论, 在对非齐次方程求解时, 其实只需求出其方程的特解就可以了。从上述例子中知, 在“降阶”过程中, 只需将其中任意常数 $c_1, c_2, \dots$ 等等取为零, 便可求得非齐次方程的特解, 这样可以大大减少计算量, 因为在积分过程中被积函数大大简化了。