

一类函数方程的解法

潘舜卿

(南京审计学院, 南京, 210029)

由于函数方程结构上的复杂性和表达形式的多样性, 使函数方程的解法具有很强的技巧性, 笔者发现, 函数方程

$$\alpha_1(x)f(f_1(x)) + \alpha_2(x)f(f_2(x)) + \cdots + \alpha_n(x)f(f_n(x)) = \beta(x) \quad (*)$$

具备某些特定的性质时, 可以构造出一个函数方程组, 用解方程组的方法来解。

命题 设 $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x), \beta(x)$ 为已知函数, M 为已知函数 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 的集合

$$M = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$$

若集合 M 中的元素满足下面 4 条性质, 则函数方程 (*) 可用解方程组的方法求解。

(1) 对于 $\forall f_i(x), f_j(x) \in M$, 总 $\exists f_k(x) \in M$, 使

$$f_i \circ f_j = \begin{cases} f_k & k \leq n \\ f_{k-n} & k > n \end{cases} \quad (k = i + j - 1, i, j, k = 1, 2, \dots, n)$$

记号“ $\circ$ ”表示函数间的复合运算, 即 M 关于函数的复合运算“ $\circ$ ”是封闭的。

(2) $f_1 \circ f_1 = f_1 \circ f_1 = f_1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 即 M 中含有单位元 $f_1(x) = x$ 。

(3) 对于 $\forall f_i(x) \in M$, 都存在反函数 $f_i^{-1}(x) \in M$, 且 $f_1^{-1} = f_1, f_{2+i}^{-1} = f_{n-i}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-2$), 即 M 中的元都有其逆元。

(4) 对于 $\forall f_i(x), f_j(x), f_k(x) \in M$, 有

$$(f_i \circ f_j) \circ f_k = f_i \circ (f_j \circ f_k)$$

成立, 即 M 关于函数的复合运算“ $\circ$ ”满足结合律。

事实上, 令 $f_2(x) = y$, 则 $x = f_2^{-1}(y) \in M$, 将 $x = f_2^{-1}(y)$ 代入方程 (*), 并记

$$f_i(f_2^{-1}(y)) = f_i \circ f_2^{-1}(y)$$

得

$$\begin{aligned} & \alpha_1(f_2^{-1}(y))f(f_1 \circ f_2^{-1}(y)) + \alpha_2(f_2^{-1}(y))f(f_2 \circ f_2^{-1}(y)) \\ & + \cdots + \alpha_n(f_2^{-1}(y))f(f_n \circ f_2^{-1}(y)) = \beta(f_2^{-1}(y)) \end{aligned}$$

将上式中的变量 y 换为 x , 得

$$\begin{aligned} & \alpha_1(f_2^{-1}(x))f(f_1 \circ f_2^{-1}(x)) + \alpha_2(f_2^{-1}(x))f(f_2 \circ f_2^{-1}(x)) \\ & + \cdots + \alpha_n(f_2^{-1}(x))f(f_n \circ f_2^{-1}(x)) = \beta(f_2^{-1}(x)) \end{aligned} \quad (1)$$

由性质(3), 得

$$f_2^{-1} = f_n$$

由性质(2), 得

$$f_1 \circ f_2^{-1} = f_1 \circ f_n = f_n$$

由性质(1), 得

$$f_i \circ f_2^{-1} = f_i \circ f_n = f_{i-1}$$

将上面这些关系式代入方程(1), 方程(1)可简化为

$$\begin{aligned} & \alpha_1(f_n(x))f(f_n(x)) + \alpha_2(f_n(x))f(f_1(x)) \\ & + \cdots + \alpha_n(f_n(x))f(f_{n-1}(x)) = \beta(f_n(x)) \end{aligned} \quad (2)$$

为方便起见,将上面的变换过程简化为 $x \rightarrow f_2^{-1}(x)$

依次将函数方程(*)施以下列变换: $x \rightarrow f_3^{-1}(x)$; $x \rightarrow f_4^{-1}(x)$; $\cdots$; $x \rightarrow f_n^{-1}(x)$ 。并利用集合 M 的性质化简,得

$$\begin{aligned} & \alpha_1(f_{n-1}(x))f(f_{n-1}(x)) + \alpha_2(f_{n-1}(x))f(f_n(x)) \\ & + \cdots + \alpha_n(f_{n-1}(x))f(f_{n-2}(x)) = \beta(f_{n-1}(x)) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_1(f_{n-2}(x))f(f_{n-2}(x)) + \alpha_2(f_{n-2}(x))f(f_{n-1}(x)) \\ & + \cdots + \alpha_n(f_{n-2}(x))f(f_{n-3}(x)) = \beta(f_{n-2}(x)) \end{aligned} \quad (4)$$

.....

$$\begin{aligned} & \alpha_1(f_2(x))f(f_2(x)) + \alpha_2(f_2(x))f(f_3(x)) \\ & + \cdots + \alpha_n(f_2(x))f(f_1(x)) = \beta(f_2(x)) \end{aligned} \quad (n)$$

方程(*)及方程(2)、(3)、 $\cdots$ 、(n)这 n 个方程中的每一个方程均含有 n 个系数为 $\alpha_i(f_j(x))$ 的一次未知元 $f(f_i(x))$ ($i, j=1, 2, \cdots, n$), 因此将这 n 个方程联立, 就可以用线性方程组的解法求得 $f(f_1(x))=f(x)$ 的解, 即函数方程(*)的解。

我们知道, 当未知元 $f(f_i(x))$ 的系数 $\alpha_i(f_j(x))$ 构成的矩阵 A 的秩与其方程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 的秩相等时, 方程组有解, 不相等时, 方程组无解。即

$$\bar{A} = [A : \beta] = \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_1(x) & \alpha_2(x) & \cdots & \alpha_n(x) & \beta(x) \\ \alpha_2(f_n(x)) & \alpha_3(f_n(x)) & \cdots & \alpha_1(f_n(x)) & \beta(f_n(x)) \\ \alpha_3(f_{n-1}(x)) & \alpha_4(f_{n-1}(x)) & \cdots & \alpha_2(f_{n-1}(x)) & \beta(f_{n-1}(x)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n(f_2(x)) & \alpha_1(f_2(x)) & \cdots & \alpha_{n-1}(f_2(x)) & \beta(f_2(x)) \end{array} \right]$$

当 $r(A)=r(A:\beta)$ 时, 方程组有解, 也就是说, 这时函数方程(*)可以用解方程组的解法求得; 当 $r(A) \neq r(A:\beta)$ 时, 方程组无解, 此时就不能用解方程组的方法求函数方程(*)的解。

例1 解函数方程

$$2f(x) - \frac{3x+5}{x+1}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{2x-1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2+3}{x-1}f\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x+1 \quad (1.1)$$

解 这里, $\alpha_1(x)=2, \alpha_2(x)=-\frac{3x+5}{x+1}, \alpha_3(x)=\frac{2x-1}{x}, \alpha_4(x)=-\frac{x^2+3}{x-1}, f_1(x)=x, f_2(x)=\frac{x-1}{x+1}, f_3(x)=-\frac{1}{x}, f_4(x)=\frac{1+x}{1-x}$, 显然, 集合 $M=\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)\}$ 满足命题中的4条性质。

作变量代换, 令

$$x \rightarrow f_2^{-1}(x) = f_4(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

$$x \rightarrow f_3^{-1}(x) = f_3(x) = -\frac{1}{x}$$

$$x \rightarrow f_1^{-1}(x) = f_2(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

分别代入函数方程(1.1),得

$$2f\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + (x-4)f(x) + \frac{3(x-1)}{x+1}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{2(x^2-x+2)}{x(x-1)}f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{1-x} \quad (1.2)$$

$$2f\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{3-5x}{x-1}f\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + (x+2)f(x) + \frac{3x^2+1}{x(x+1)}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 - \frac{1}{x} \quad (1.3)$$

$$2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{4x+1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{x-3}{x-1}f\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{2(x^2+x+1)}{x+1}f(x) = \frac{2x}{x+1} \quad (1.4)$$

将上面 4 个方程(1.1)、(1.2)、(1.3)、(1.4)联立得方程组,解这个方程组:

$$[A;\beta] = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3x+5}{x+1} & \frac{2x-1}{x} & -\frac{x^2+3}{x-1} & x+1 \\ x-4 & \frac{3x-1}{x+1} & \frac{2(x^2-x+2)}{x(x-1)} & 2 & \frac{2}{1-x} \\ x+2 & \frac{3x^2+1}{x(x+1)} & 2 & \frac{3-5x}{x-1} & 1-\frac{1}{x} \\ \frac{2(x^2+x+1)}{x+1} & 2 & -\frac{4x+1}{x} & \frac{x-3}{x-1} & \frac{2x}{x+1} \end{bmatrix}$$

初等行变换
→ →

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4x^2-x+1}{5x(x-1)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2x^2-3x+3}{5(x-1)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{x^2+x+4}{5(x+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3x^2+3x+2}{5x(x+1)} \end{bmatrix}$$

$$\therefore f(x) = \frac{4x^2-x+1}{5x(x-1)} \quad (1.5)$$

将结果(1.5)代入原方程(1.1)验证可知,满足方程,故函数方程(1.1)的解为(1.5)。

不难看出,命题中所述的集合 M 实际上是关于函数的复合运算“ $\circ$ ”作成一群。但在实际问题中,具有形式(*)的函数方程其集合 $M = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ 一般对运算“ $\circ$ ”并不都具备成为群的条件。这时如若能够造成 S 个函数: $f_{n+1}(x), f_{n+2}(x), \dots, f_{n+s}(x)$, 将集合 M 扩充为集合 $M' = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), f_{n+1}(x), f_{n+2}(x), \dots, f_{n+s}(x)\}$, 使 M' 关于运算“ $\circ$ ”成为一个群, 函数方程(*)仍能用上面方法来解。

对方程(*)作变量代换: $x \rightarrow f_2^{-1}(x); \dots; x \rightarrow f_n^{-1}(x); x \rightarrow f_{n+1}^{-1}(x); \dots; x \rightarrow f_{n+s}^{-1}(x)$ 得 $(n+s-1)$ 个由 $(n+s)$ 个未知元 $f(f_i(x)) (i=1, 2, \dots, n+s)$ 组成的线性方程, 将它们与方程(*)联立, 解此联立方程组, 即可得 $f(x)$ 。

这个结论显然是正确的, 因为这个解实际上可以看作是函数方程

$$\alpha_1(x)f(f_1(x)) + \alpha_2(x)f(f_2(x)) + \dots + \alpha_n(x)f(f_n(x)) + \alpha_{n+1}(x)f(f_{n+1}(x)) \\ + \alpha_{n+2}(x)f(f_{n+2}(x)) + \dots + \alpha_{n+s}(x)f(f_{n+s}(x)) = \beta(x)$$

当 $\alpha_{n+1}(x) = \alpha_{n+2}(x) = \dots = \alpha_{n+s}(x) = 0$ 时的解。

例2 解函数方程

$$2f\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right) = 1 \quad (2.1)$$

解 令 $\alpha_2(x) = 2, \alpha_3(x) = -\frac{1}{x}, \beta(x) = 1, f_2(x) = \frac{1+x}{1-x}, f_3(x) = -\frac{1}{x}$

显然, 集合 $M = \{f_2(x), f_3(x)\}$ 关于复合函数运算“ $\circ$ ”不能作成一个群, 此时我们构造函数:

$$f_1(x) = x, f_4(x) = \frac{x-1}{x+1} \text{ 得}$$

$$M' = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)\}$$

M' 关于运算“ $\circ$ ”作成一个群, 因此可用上面方法来解。

作变量代换, 令 $x \rightarrow f_2^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1}; x \rightarrow f_3^{-1}(x) = -\frac{1}{x}; x \rightarrow f_4^{-1}(x) = \frac{1+x}{1-x}$

分别代入函数方程(2.1), 得

$$2f(x) - \frac{x+1}{x-1}f\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 1 \quad (2.2)$$

$$2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + xf(x) = 1 \quad (2.3)$$

$$2f\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{x-1}{x+1}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 \quad (2.4)$$

将上面4个方程(2.1)、(2.2)、(2.3)、(2.4)联立, 得方程组, 解这个方程组, 得

$$f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{5x(x-1)} \quad (2.5)$$

将结果(2.5)代入方程(2.1)验证可知, 它是方程(2.1)的解。



江苏省数学学会高工专分会于1995年11月初在连云港化工高等专科学校举行第二次学术年会, 我校应学会之请, 以《盐城工专学报》1995年第3期(总第29.2期)为数学专刊, 选载学会为年会征集的论文, 并于年会会期前出版。

本专刊选载的论文内容涉及数学理论研究、应用研究、课程改革、课程建设、教材教法研究等诸方面。一些论文已通过筛选, 经与作者联系, 或目前还是阶段性成果, 或已有刊物考虑刊用, 或受版面限制而未编入。因此, 本专刊基本上反映了江苏省培养高等应用性专门人才的教育领域中数学工作者对数学理论及其应用、数学课程改革与建设研究的状况和水平。论文排序按内容分类。部分论文因内容较多, 版面有限, 用略小的字体排版。限于编者的水平, 编辑排版工作中的不当之处, 请批评指正。

谨以本专刊的出版反映盐城工业专科学校对促进培养应用性人才的教育教学改革的高度重视和支持。祝年会成功。祝愿数学工作者在科研和课程改革与建设中取得重大成果。