

求三角函数有理分式积分的一种有效方法

严文利

(淮阴工业专科学校, 淮阴, 223001)

1 方法的提出和基本思想

三角函数有理分式是指由两个三角函数有理式的商表示的函数。这类函数的积分, 通常

是, 利用万能公式 $\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ 和变量代换 $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

将之转化为求有理函数的积分, 这种方法可行, 但因涉及到确定待定系数问题, 计算一般较繁琐。现介绍一种求三角函数的有理分式积分的有效方法, 基本思想是: 利用 $\int f(x) dx = \int f(x) \frac{p(x)}{p(x)} dx$ (其中 $p(x)$ 为某一三角函数有理式) 这一性质, 选择适当的 $p(x)$, 设法使右边的积分易于求出, 从而达到计算原积分的目的。

2 举例

新方法运用关键在于选择适当的 $p(x)$, 使 $\int f(x) \frac{p(x)}{p(x)} dx$ 易于积出, 一般 $p(x)$ 选择时应考虑三角函数有理分式的分母特点, 尽量使分母部分消除或简化, 下举例说明。

例1 求 $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$

解 考虑到被积函数分母中有 $1 + \sin x$, 选择 $p(x) = 1 - \sin x$, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx &= \int \frac{\sin x(1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \operatorname{tg} x \sec x dx - \int \operatorname{tg}^2 x dx \\ &= \sec x - \int (\sec^2 x - 1) dx = \sec x - \operatorname{tg} x + x + c \end{aligned}$$

例2 求 $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ 。

解 此时被积函数分母为 $\sin x + \cos x$, 考虑到 $(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, 选择 $p(x) = \cos x - \sin x$, 故有

$$\begin{aligned} \text{原积分} &= \int \frac{\sin x(\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int \frac{\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1 - \cos 2x}{2}}{\cos 2x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\operatorname{tg} 2x + 1 - \sec 2x) dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\cos 2x}{\sec 2x + \operatorname{tg} 2x} \right| + \frac{x}{2} + c \end{aligned}$$

化简后, 得 $I = \frac{1}{2} \ln |\cos x - \sin x| + \frac{x}{2} + c$.

例3 求 $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$

解 这里, 被积函数的分母为 $\cos x$ 的奇次方, 分子为 $\sin x$ 的偶次方, 考虑到 $\cos x dx = d\sin x$ 及 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, 选择 $p(x) = \cos x$, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx &= \int \frac{\sin^2 x \cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} d\sin x \\ &= \int \frac{u^2}{1 - u^2} du = \int \left(-1 + \frac{1}{1 - u^2} \right) du \\ &= \int \left(-1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - u} + \frac{\frac{1}{2}}{1 + u} \right) du = -u + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| + c \\ &= -\sin x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c = -\sin x + \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + c \\ &= -\sin x + \ln |\sec x + \tan x| + C \end{aligned}$$

推广 对形如 $\int \frac{\sin^{2m} x}{\cos^{2n+1} x} dx$ (m, n 为任意正整数), 用此法时均可选择 $p(x) = \cos x$ 计算.

对形如 $\int \frac{\cos^{2m} x}{\sin^{2n+1} x} dx$ (m, n 为正整数), 计算时选择 $p(x) = \sin x$.

3 几点说明

(1) 新方法避免了用万能代换时确定待定系数的过程, 在一定程度上减少了计算量, 但对某些特殊的三角函数有理分式的积分来说, 这种方法不一定是简捷的. 如对例3中的积分, 考虑到 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, 便有

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx &= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx = \int (\sec x - \cos x) dx \\ &= \ln |\sec x + \tan x| - \sin x + c \end{aligned}$$

(2) 用此法时需要学生对三角函数的积分及三角函数之间关系熟练. 对学生的基础要求较高.

(3) 此法的基本思想也可运用到有理分式的积分中, 同样可达到迅速解题的效果.

如: 求 $\int \frac{1}{x(1+x^4)} dx$

解 选 $p(x) = x^3$, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(1+x^4)} &= \int \frac{x^3 dx}{x^4(1+x^4)} = \frac{1}{4} \int \frac{dx^4}{x^4(1+x^4)} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{du}{u(1+u)} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \right) du \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{u}{1+u} \right| + c = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^4}{1+x^4} \right| + c \end{aligned}$$

参考文献

高等数学(上册)(同济大学本科少学时). 高等教育出版社.