分部积分教学法研究

杨淑娥
(彭城大学,徐州,221008)

分部积分法是求不定积分的重要而又基本的方法。虽然它不如换元积分法用得普遍,但它有特殊的功用,有些换元积分法解决不了的题目,分部积分能很好的解决。因此,它是积分法教学重点之一。下面就分部积分教学中应注意的几个问题,谈谈自己的教学体会。

一、适合分部积分的积分类型

分部积分是在讲过换元法之后讲的方法。如何使学生在看到积分后,就知道是否能用分部积分法,这一点很重要。这就要求能识别适合分部积分的积分类型。

微分法与积分法互为逆运算。由于分部积分法是乘法求导法则的逆运算,所以当被积函数是两个函数的积时应首先考虑用分部积分法。但是,由于相乘的情况有时也用凑微分法,所以要分三类,这样可以减少解题的盲目性。一般来说当被积函数含因子:对数函数、反三角函数、多项式函数、三角函数、指数函数时可以利用分部积分法,常见的有下列几类;

(1) $\int p(x)e^{ax}dx$、$\int p(x)\sin bx dx$

$\int p(x)\cos bx dx$;

(2) $\int ip(x)\ln x dx$、$\int p(x)\arcsin bx dx$

$\int p(x)\arccos bx dx$;

(3) $\int e^{ax}\sin bx dx$、$\int e^{dx}\cos bx dx$

$p(x)$为n次多项式,a、b均为常数。

当被积函数是一个函数,但它的导数为代数函数时,也可以用分部积分法,如下面几例:$\int \ln x dx$、$\int \arcsin x dx$ $\int \mathrm{arctg} x dx$、$\int \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})dx$。被积函数为三个函数乘积也可以用分部积分法,如:$\int x^n e^{ax}\sin bx dx$、$\int x^n e^{ax}\cos bx dx$。

二、恰当地选择 u 和 dv

运用分部积分法的关键在于恰当地选择u和dv,这是因为应用分部积分公式的目的是为了将难积分的$\int u dv$变成易积分的$\int v du$,这也是选择u和dv的原则。u和dv选择不恰当,积分会变得越来越复杂,甚至积不出来。

u和dv的选择是有规律可循的,可以采用*LIATE*选择法,即用L表示对数函数、I表示反三角函数、A表示多项式函数、T表示三角函数、E表示指数函数,将这五类函数按上列顺序排成安母表*LIATE*,在被积函数的表达式中,选择出现在字母表中较前面的那个字母所代表的函数作u,余下的表达式为dv,如$\int x^2 an\sin s dx$选$u=an\sin x$,$dv=x^2dx$。该选择法记忆方便、简单易行。

三、应用分部积分法出现的还原问题

有些积分在连续使用分部积分公式的过程中会出现复原的情况,一旦出现往往有两种可能结果,应予以重视。

1、通过移项、解方程可以得到结果

当连续使用分部积分的过程中出现了原积分的形式,可以把等式看作以原积分为未知量的方程,解之即得所求积分。如:$\int \sin(\ln x)dx$、$\int \cos(\ln x)dx$ $\int e^{ax}\sin bx dx$、$\int e^{ax}\sin bx dx$均可用该方法求解。

如:$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$

$= x\sin(\ln x)dx - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx$

移项,解得:$\int \sin(\ln x)dx$、$= \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$

细分析会发现,这类积分在第一次使用分部积分法后,出现的$\int v du$与原积分$\int u dv$难易程度差不多,如$\int \sin(\ln x)dx$与$\int \cos(\ln x)dx$积分难易程度相同,这时考虑再用分部积分法直到出现原积分,即可通过移项解方程求得结果。

用下面的方法也可以求出用分部积分法出现还原的不定积分。

(下转第107)

(1) 当 $f(x)=P_m(x)\exp(\lambda x)$，令 $y^*=x^kQ_m(x)\exp(\lambda x)$，其中 λ 是实数；$k=0$，λ 不是特征根；$k=1$，λ 是特征单根；$k=2$，λ 是特征重根。此处包括 $\lambda=0$，$f(x)=P_m(x)$ 的情况。

(2) 当 $f(x)=P_m(x)\exp((\alpha+i\beta)x)$，令 $y^*=x^kQ_m(x)\exp((\alpha+i\beta)x)$，其中 $\lambda=\alpha+i\beta$ 是复数；$k=0$，λ 不是特征根；$k=1$，λ 是特征单根。此处包括 $\alpha=0$，$f(x)=P_m(x)\exp(i\beta x)$ 的情况。

(3) 常见 $f_1(x)=a\cos\beta x$ 或 $f_2(x)=a\sin\beta x$，令 $y^*=x^kA\exp(i\beta x)$，其中；$k=0$，λ 不是特征根；$k=1$，λ 是特征单根。先由 $L[y^*]=a\exp(i\beta x)$ 定出 $y^*=y_1^*+iy_2^*$，它对应于 $L[y]=f_1(x)+if_2(x)$ 的特解，根据定理5知，$y_1^*=\mathrm{Re}y^*$ 是 $L[y]=f_1(x)$ 的特解；$y_2^*=\mathrm{Im}y^*$ 是对应于 $L[y]=f_2(x)$ 的特解。

3. 由定理3得式(2.4)的通解　$y=c_1y_1+c_2y_2+y^*$ 或 $y=c_1y_1+c_2y_2+\mathrm{Re}y^*$，或 $y=c_1y_1+c_2y_2+\mathrm{Im}y^*$。

例2 求 $y''-7y'+6y=\cos x$ 的通解。

解　(1) $y''-7y'+6y=0$，$r^2-7r+6=0$。所以，$r_1=1$，$r_2=6$，$\bar{y}=c_1\exp(x)+c_2\exp(6x)$。

(2) 先考虑 $y''-7y'+6y=\exp(ix)$，因 $\lambda=i$ 不是特征根，故令 $y^*=A\exp(ix)$，$y^{*\prime}=Ai\exp(ix)$，$y^{*\prime\prime}=-A\exp(ix)$，代入方程中得 $A=\dfrac{1}{5-7i}=\dfrac{1}{74}(5+7i)$，$y^*=\left(\dfrac{5}{74}+i\dfrac{7}{74}\right)\cdot(\cos x+i\sin x)$，取 $\mathrm{Re}y^*=\dfrac{1}{74}(5\cos x-7\sin x)$。

(3) 得原非齐次方程通解 $y=c_1\exp(x)+c_2\exp(6x)+\dfrac{1}{74}(5\cos x-7\sin x)$

关于列微分方程问题，也应给予充分重视。(1) 用微元法列出；(2) 由问题的几何意义和物理量满足的科学规律列出。

由于线性微分方程应用广泛，它起到工程数学的作用，因此，在教材改革中应适当增加应用问题的内容，以提高理论联系实际的能力，培养分析问题和解决问题的技能和技巧。

(上接第104页)

如：求 $\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$、$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$

解：对它们分别施行一次分部积分法，得

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$$

$$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$$

将上两式看成关于 $\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$、$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$ 的方程组，解之可得：

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+c$$

$$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+c$$

$\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$ 及 $\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x$、$\int xe^x\cos x\mathrm{d}x$ 及 $\int xe^x\sin x\mathrm{d}x$ 也可以用该方法求解。

2、导出递推公式

一般地，当被积函数带有 n 次幂指数时，运用分部积分法不能立即得出结果，只能将被积函数降次并出现还原，这时可导出递推公式，再用递推公式求解不定积分。常见的有：$\int\ln^n x\mathrm{d}x$、$\int\sin^n x\mathrm{d}x$、$\int\cos^n x\mathrm{d}x$；$\int\sec^n x\mathrm{d}x$、$\int\csc^n x\mathrm{d}x$、$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$

其中 a 为常数，n 为自然数。

值得注意的是，前面提到过的 $\int p(x)e^{ax}\mathrm{d}x$、$\int p(x)\sin bx\mathrm{d}$、$\int p(x)\cos bx\mathrm{d}x$ 可以用分部积分法求解。这里，$p(x)$ 为 n 次多项式，但是 $p(x)$ 为分式则不行。如：

$$I_n=\int\frac{e^x}{x^n}\mathrm{d}x, J_n=\int\frac{\sin x}{x^n}\mathrm{d}x、L_n=\int\frac{\cos x}{x^n}\mathrm{d}x$$

用分部积分法容易给它们建立递推公式，但运用递推公式最后可归结为下列三个积分：

$$I_1=\int\frac{e^x}{x}\mathrm{d}x, J_1=\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x、L_1=\int\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$$

我们已经知道它们均不能用初等函数表示。

由于分部积分法对求被积函数为两个或三个函数乘积的不定积分有特效，这就决定了它在积分方法中的重要作用。在教学中应将重点放在以上三个方面，即在确认适合分部积分法的积分类型的前提下，恰当地选择 u 和 $\mathrm{d}v$，正确地运用分部积分公式就能很好地掌握分部积分法，同时分部积分法使用过程中出现的还原问题，在教学中也应给予重视。