第8卷第3期
1995年10月

盐城工业专科学校学报
Journal of Yancheng College of Technology

Vol. 8 No. 3
Oct. 1995

关于线性微分方程的教学研究

王　樵
（彭城大学，徐州，221008）

线性微分方程是工程技术和经济管理中常用的理论知识，如果把一、二阶线性方程的公式解法与常系数线性方程的特殊解法分开来叙述，突出应用部分，则简明易懂，便于教学。

一、一阶线性微分方程

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1.1}$$

$$y' + P(x)y = 0 \tag{1.2}$$

设为非齐次与齐次方程，由分离变量法可求齐次方程通解 $y = c\cdot\exp(-\int P(x)\mathrm{d}x)$；由常数变易法可求非齐次方程通解 $y = \exp(-\int P(x)\mathrm{d}x)[C + \int Q(x)\exp(\int P(x)\mathrm{d}x)\mathrm{d}x]$

非齐次方程通解结构定理　若 $\bar{y}$ 是式(1.2)的通解，y^* 是式(1.1)的一个特解，则 $y = \bar{y} + y^*$ 是式(1.1)的通解。

常系数方程特殊解法　设

$$y' + Py = Q(x) \tag{1.3}$$

P为实数，有以下解法。

1. 用特征根法求齐次方程

$$y' + Py = 0 \tag{1.4}$$

的通解。特征根 $r = -P$，$\bar{y} = c\cdot\exp(-Px)$。

2. 用待定常数法求式(1.3)的一个特解 y^*。对不同类型的 $Q(x)$，给出 y^* 含待定常数的形式解。这也为二阶的情况，先开一条路子，例如以下几例：

(1) 当 $Q(x) = Q_m(x)$ 为 m 次多项式，令 $y^* = P_m(x)$。如当 $Q_0(x) = b$，令 $y^* = B$；当 $Q_1(x) = ax + b$，令 $y^* = Ax + B$ 等。

(2) 当 $Q(x) = a\exp(\lambda x)$，令 $y^* = x^0 A\exp(\lambda x)$ （$\lambda \neq -P$　λ 不是特征根）；$y^* = x' A\exp(\lambda x)$ （$\lambda = -P$　λ 是特征根）。

(3) 当 $Q(x) = a\exp(i\beta x)$，令 $y^* = A\exp(i\beta x)$，取 $y^* = y_1^* + iy_2^*$。

当 $Q(x) = a\cos\beta x$，令 $y^* = A\exp(i\beta x)$，取 $y_1^* = \mathrm{Re}y^*$。

当 $Q(x) = a\sin\beta x$，令 $y^* = A\exp(i\beta x)$，取 $y_2^* = \mathrm{Im}y^*$。

(4) 当 $Q(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$　（其中 a、b 不全为0），令 $y^* = A\cos\beta x + B\sin\beta x$。

待定出常数 A、B 后，得出非齐次方程的一个特解。

3. 根据非齐次方程通解结构定理，写出其通解 $y = \bar{y} + \mathrm{Re}y^*$，或 $y = \bar{y} + Rey^*$，或 $y = \bar{y} + \mathrm{Im}y^*$

二、二阶线性微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{2.1}$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{2.2}$$

设为非齐次与齐次方程。

1、二阶齐次线性微分方程

定理1（解的结构定理）　若 y_1 和 y_2 是式(2.2)的两个线性无关特解，则 $y = c_1y_1 + c_2y_2$ 是(2.2)的通解。

定理2（基解组定理）　若已知 $y_1 \neq 0$，y_1 是齐次方程(2.2)式的一个特解，则 $y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1^2}\exp(-\int P(x)\mathrm{d}x)\mathrm{d}x$（其中不定积分不带任意常数）是与 y_1 线性无关的特解，那末 y_1 与 y_2 构成式(2.2)的一个基解组。

证　用待定函数法，令 $y_2 = y_1\cdot u(x)$ 代入方程(2.2)得 $u(x) = \int\frac{1}{y_1^2}\exp(-\int P(x)\mathrm{d}x)\mathrm{d}x$，所以 $y_2 = y_1\cdot\int\frac{1}{y_1^2}\exp(-\int P(x)\mathrm{d}x)\mathrm{d}x$。

有以下常用来观察特解的方法：

1. 若 $P(x) \neq 0$　$Q(x) = 0$ 时，令 $y_1 = 1$。例如

(1) $y'' - \frac{1}{x}y' = 0$，令 $y_1 = 1$，$y_2 = \int\exp\left(\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}$。

(2) $y'' + \frac{1}{x}y' = 0$，令 $y_1 = 1$，$y_2 = \int\exp(-\int\frac{\mathrm{d}x}{x})\mathrm{d}x = \int\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x$。

2. 若 $1 + P(x) + Q(x) = 0$ 时，令 $y_1 = \exp(x)$；

$1-P(x)+Q(x)=0$时，令$y_1=\exp(-x)$；$P(x)+x\cdot Q(X)=0$时，令$y_1=x$；$2-xP(x)+x^2Q(x)=0$时，令$y_1=\frac{1}{x}$。例如

(1)$y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=0$，因$P(x)+xQ(x)=0$，令$y_1=x$；又因$1+P(x)+Q(x)=0$，可令$y_2=\exp(x)$。

(2)$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$，因$P(x)+Q(x)=0$，令$y_1=x$；又因$2-xP(x)+x^2Q(x)=0$，可令$y_2=\frac{1}{x}$。

(3)$y''-\frac{1}{x-1}y'-\frac{x}{x-1}y=0$，因$1-P(x)+Q(x)=0$，令$y_1=\exp(-x)$；$y_2=\exp(-x)\int\exp(2x)(x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\exp(x)(x-\frac{3}{2})$。

3. 若$P(x)=0, Q(x)=-\omega^2(\omega>0)$时，令$y_1=\exp(\omega x)$与$y_2=\exp(-\omega i)$。$P(x)=0, Q(x)=\omega^2(\omega>0)$时，令$y_1=\exp(+i\omega x)$与$y_2=\exp(-i\omega x)$；或令$y_1=\cos\omega x$和$y_2=\sin\omega x$。

2、常系数二阶齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=0 \quad (p、q\text{为实数}) \quad (2.3)$$

含有$y=\exp(rx)$的形式解，其中r满足特征方程$r^2+pr+q\cdot 1=0$，特征根$r_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$。

1. 当$p^2-4q>0$时，有二不同实根r_1、r_2。有$y_1=\exp(r_1x)$和$y_2=\exp(r_2x)$。

2. 当$p^2-4q=0$时，有二相同实根$r_1=-\frac{p}{2}$，有$y_1=\exp(r_1x)$。由定理2得$y_2=\exp(r_1x)\int\exp(-2r_1x)\cdot\exp(+2r_1x)\mathrm{d}x=x\exp(r_1x)$。

3. 当$p^2-4q<0$时，有二共轭复根$r_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm i\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}=\alpha\pm i\beta$。有$y_1=\exp((\alpha+i\beta)x)$和$y_2=\exp(\alpha-i\beta x)$或$y_1=\exp(\alpha x)\cos\beta x$和$y_2=\exp(\alpha x)\cdot\sin\beta x$。

3、二阶非齐次线性微分方程

定理3(非齐次方程通解结构定理) 若y_1和y_2是式(2.2)的一个基解组，$\bar{y}=c_1y_1+c_2y_2$是式(2.2)的通解；y^*是式(2.1)的一个特解，则$y=\bar{y}+y^*$是式(1.1)的通解。

定理4(非齐次方程特解定理) 若y_1和y_2是式(2.2)的一个基解组，则式(2.1)的一个特解为$y^*=y_1\int\frac{-y_2f(x)}{\omega}\mathrm{d}x+y_2\int\frac{y_1f(x)}{\omega}\mathrm{d}x$ 且 $\omega=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}\neq 0$ 其中不定积分不带任意常数。

证 用常数变易法，令$y=c_1(x)\cdot y_1+c_2(x)\cdot y_2$代入式(2.1)得

$$c_1(x)=\int\frac{-y_2f(x)}{\omega}\mathrm{d}x \text{ 及 } c_2(x)=\int\frac{y_1f(x)}{\omega}\mathrm{d}x$$

$\therefore y^*=y_1\cdot\int\frac{-y_2f(x)}{\omega}\mathrm{d}x+y_2\cdot\int\frac{y_1f(x)}{\omega}\mathrm{d}x$ 且 $\omega=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}\neq 0$。证毕。

定理5(复数特解的分解定理) 若$y''+P(x)y'+Q(x)=g_1(x)+ig_2(x)$。有特解$y^*=y_1^*+iy_2^*$，则$y_1^*$是$y''+P(x)y'+Q(x)y=g_1(x)$的特解；而$y_2^*$是$y''+P(x)y'+Q(x)y=g_2(x)$的特解。

证 令$L[y]=y''+P(x)y'+Q(x)y$，因为$L[y_1^*+iy_2^*]=L[y_1^*]+iL[y_2^*]$，又$L[y_1^*+iy_2^*]=g_1(x)+ig_2(x)$，所以$L[y_1^*]+iL[y_2^*]=g_1(x)+ig_2(x)$。比较两端实部与虚部得$L[y_1^*]=g_1(x)$，$L[y_2^*]=g_2(x)$。证毕。

例1 求$y''-\frac{y'}{x}=x$的通解。

解 (1)先求$y''-\frac{y'}{x}=0$的通解$\bar{y}$，因$P(x)=-\frac{1}{x}$，$Q(x)=0$，令$y_1=1$，所以$y_2=y_1\cdot\int\frac{1}{y_1^2}\exp(-\int P(x)\mathrm{d}x)\mathrm{d}x=\int\exp\left(\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}$。得$\bar{y}=c_1+c_2x^2$。

(2) 用定理4，由于$\omega=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x^2\\ 0 & 2x\end{vmatrix}=2x\neq 0$，所以，$c_1(x)=-\int\frac{y_2f(x)}{\omega}\mathrm{d}x=-\int\frac{x^2\cdot x}{2x}\mathrm{d}x=-\frac{x^3}{6}$，$c_2(x)=\int\frac{y_1f(x)}{\omega}\mathrm{d}x=\int\frac{1\cdot x}{2x}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}$，得$y^*=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x\cdot x^2=\frac{1}{3}x^3$。

(3)由定理3得非齐次方程通解$y=c_1+c_2x^2+\frac{1}{3}x^3$。

4、常系数二阶非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=0 \quad (p、q\text{皆为实数})(2.4)$$

1. 用特征根法求式(2.3)的通解$\bar{y}=c_1y_1+c_2y_2$。2. 用待定常数法求式(2.4)的一个特解y^*。根据$f(x)$给出特解形式。

(1) 当 $f(x)=P_m(x)\exp(\lambda x)$，令 $y^*=x^kQ_m(x)\exp(\lambda x)$，其中 λ 是实数；$k=0$，λ 不是特征根；$k=1$，λ 是特征单根；$k=2$，λ 是特征重根。此处包括 $\lambda=0$，$f(x)=P_m(x)$ 的情况。

(2) 当 $f(x)=P_m(x)\exp((\alpha+i\beta)x)$，令 $y^*=x^kQ_m(x)\exp((\alpha+i\beta)x)$，其中 $\lambda=\alpha+i\beta$ 是复数；$k=0$，λ 不是特征根；$k=1$，λ 是特征单根。此处包括 $\alpha=0$，$f(x)=P_m(x)\exp(i\beta x)$ 的情况。

(3) 常见 $f_1(x)=a\cos\beta x$ 或 $f_2(x)=a\sin\beta x$，令 $y^*=x^kA\exp(i\beta x)$，其中；$k=0$，λ 不是特征根；$k=1$，λ 是特征单根。先由 $L[y^*]=a\exp(i\beta x)$ 定出 $y^*=y_1^*+iy_2^*$，它对应于 $L[y]=f_1(x)+if_2(x)$ 的特解，根据定理5知，$y_1^*=\mathrm{Re}y^*$ 是 $L[y]=f_1(x)$ 的特解；$y_2^*=\mathrm{Im}y^*$ 是对应于 $L[y]=f_2(x)$ 的特解。

3. 由定理3得式(2.4)的通解 $y=c_1y_1+c_2y_2+y^*$ 或 $y=c_1y_1+c_2y_2+\mathrm{Re}y^*$，或 $y=c_1y_1+c_2y_2+\mathrm{Im}y^*$。

例2 求 $y''-7y'+6y=\cos x$ 的通解。

解 (1) $y''-7y'+6y=0$，$r^2-7r+6=0$。所以，$r_1=1$，$r_2=6$，$\bar{y}=c_1\exp(x)+c_2\exp(6x)$。

(2) 先考虑 $y''-7y'+6y=\exp(ix)$，因 $\lambda=i$ 不是特征根，故令 $y^*=A\exp(ix)$，$y^{*\prime}=Ai\exp(ix)$，$y^{*\prime\prime}=-A\exp(ix)$，代入方程中得 $A=\frac{1}{5-7i}=\frac{1}{74}(5+7i)$，$y^*=\left(\frac{5}{74}+i\frac{7}{74}\right)\cdot(\cos x+i\sin x)$，取 $\mathrm{Re}y^*=\frac{1}{74}(5\cos x-7\sin x)$。

(3) 得原非齐次方程通解 $y=c_1\exp(x)+c_2\exp(6x)+\frac{1}{74}(5\cos x-7\sin x)$

关于列微分方程问题，也应给予充分重视。(1)用微元法列出；(2)由问题的几何意义和物理量满足的科学规律列出。

由于线性微分方程应用广泛，它起到工程数学的作用，因此，在教材改革中应适当增加应用问题的内容，以提高理论联系实际的能力，培养分析问题和解决问题的技能和技巧。

(上接第104页)

如：求 $\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$、$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$

解：对它们分别施行一次分部积分法，得

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$$

$$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$$

将上两式看成关于 $\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$、$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$ 的方程组，解之可得：

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+c$$

$$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+c$$

$\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$ 及 $\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x$、$\int xe^x\cos x\mathrm{d}x$ 及 $\int xe^x\sin x\mathrm{d}x$ 也可以用该方法求解。

2、导出递推公式

一般地，当被积函数带有 n 次幂指数时，运用分部积分法不能立即得出结果，只能将被积函数降次并出现还原，这时可导出递推公式，再用递推公式求解不定积分。常见的有：$\int\ln^n x\mathrm{d}x$、$\int\sin^n x\mathrm{d}x$、$\int\cos^n x\mathrm{d}x$；$\int\mathrm{see}^n x\mathrm{d}x$、$\int\csc^n x\mathrm{d}x$、$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$

其中 a 为常数，n 为自然数。

值得注意的是，前面提到过的 $\int p(x)e^{ax}\mathrm{d}x$、$\int p(x)\sin bx\mathrm{d}$、$\int p(x)\cos bx\mathrm{d}x$ 可以用分部积分法求解。这里，$p(x)$ 为 n 次多项式，但是 $p(x)$ 为分式则不行。如：

$$I_n=\int\frac{e^x}{x^n}\mathrm{d}x，J_n=\int\frac{\sin x}{x^n}\mathrm{d}x、L_n=\int\frac{\cos x}{x^n}\mathrm{d}x$$

用分部积分法容易给它们建立递推公式，但运用递推公式最后可归结为下列三个积分：

$$I_1=\int\frac{e^x}{x}\mathrm{d}x，J_1=\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x、L_1=\int\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$$

我们已经知道它们均不能用初等函数表示。

由于分部积分法对求被积函数为两个或三个函数乘积的不定积分有特效，这就决定了它在积分方法中的重要作用。在教学中应将重点放在以上三个方面，即在确认适合分部积分法的积分类型的前提下，恰当地选择 u 和 $\mathrm{d}v$，正确地运用分部积分公式就能很好地掌握分部积分法，同时分部积分法使用过程中出现的还原问题，在教学中也应给予重视。