无穷级数收敛性的狄利克雷判别定理条件的必要性

祁正涛
(盐城工业专科学校,盐城,224003)

在无穷级数与无穷积分的收敛性判别定理中,狄利克雷(Dirichlet)判别法占有相当重要的地位。对此判别定理中所设条件的充分性在大多数数学分析教材中都作了论证。然而该定理中条件是否必要呢?本文对此提出一点看法,并就在常数项级数,函数项级数及无穷积分中狄利克雷定理条件的必要性作出论证。

1 常数项级数中狄利克雷定理

原定理的内容是:如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和有界,而数列$b_n$是单调减少且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛。

定理中两个条件:①$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$部分和有界;②数列$b_n$单调减少且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$,不仅是充分的而且也是必要的,即有如下定理。

定理1 常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分且必要条件是:存在分解式$u_n=a_nb_n$使得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和有界,数列$b_n$单调减少且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$。

证 充分性 见数学分析教材,本文不再重复。

必要性 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则对任意正数$\epsilon$,必存在正整数$N$,使得当$K>N$时,有$\left|\sum\limits_{n=k}^{\infty}u_n\right|<\epsilon$成立。

那么,对于$\epsilon=i^{-3}$(i为正整数),必存在正整数$N_i(N_i>N_{i-1})$,使得:

当$K>N_i$时,有$\left|\sum\limits_{n=k}^{\infty}u_n\right|<i^{-3}$,$(i=1,2,3,\cdots)$

令 $b_n=\begin{cases}1 & 当\ 1\leqslant n\leqslant N_1\\ i^{-1} & N_i<n\leqslant N_{i+1}\quad(i=1,2,3,\cdots)\end{cases}$

$a_n=\dfrac{u_n}{b_n}$, $n=1,2,3\cdots$

则 $u_n=a_nb_n$,而且数列b_n是单调减少的, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$。

下面证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{b_n}$的部分和有界,为此记$A_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_i}{b_i}$,即证$A_n$有界。

(1) 当$n\leqslant N_1$时,$A_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$

$$|A_n|=\left|\sum_{i=1}^{n}u_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|u_i|\leqslant\sum_{i=1}^{N_1}|u_i|=M_1$$

M_1 为某确定常数，故 A_n 有界。

(2) 当 $n > N_1$ 时，必存在一个正整数 K，满足 $N_K < n \leqslant N_{K+1}$，这时

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{b_i} = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{u_i}{b_i} + \sum_{i=N_1+1}^{N_2} \frac{u_i}{b_i} + \sum_{i=N_2+1}^{N_3} \frac{u_i}{b_i} + \cdots + \sum_{i=N_{K-1}+1}^{N_K} \frac{u_i}{b_i} + \sum_{i=N_K+1}^{n} \frac{u_i}{b_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{N_1} u_i + \sum_{i=N_1+1}^{N_2} u_i + \sum_{i=N_2+1}^{N_3} 2u_i + \cdots + \sum_{i=N_{K-1}+1}^{N_K} (K-1)u_i + \sum_{i=N_K+1}^{n} Ku_i$$

$$|A_n| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{N_1} u_i\right| + \left|\sum_{i=N_1+1}^{\infty} u_i - \sum_{i=N_2+1}^{\infty} u_i\right| + 2\left|\sum_{i=N_2+1}^{\infty} u_i - \sum_{i=N_3+1}^{\infty} u_i\right| + \cdots$$

$$+ (K-1)\left|\sum_{i=N_{K-1}+1}^{\infty} u_i - \sum_{i=N_K+1}^{\infty} u_i\right| + K\left|\sum_{i=N_K+1}^{\infty} u_i - \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i\right|$$

$$\leqslant M_1 + \left(\left|\sum_{i=N_1+1}^{\infty} u_i\right| + \left|\sum_{i=N_2+1}^{\infty} u_i\right|\right) + 2\left(\left|\sum_{i=N_2+1}^{\infty} u_i\right| + \left|\sum_{i=N_3+1}^{\infty} u_i\right|\right) + \cdots$$

$$+ (K-1)\left(\left|\sum_{i=N_{K-1}+1}^{\infty} u_i\right| + \left|\sum_{i=N_K+1}^{\infty} u_i\right|\right) + K\left(\left|\sum_{i=N_K+1}^{\infty} u_i\right| + \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i\right|\right)$$

$$\leqslant M_1 + \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3}\right) + 2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \cdots + (K-1)\left(\frac{1}{(K-1)^3} + \frac{1}{K^3}\right) + K\left(\frac{1}{K^3} + \frac{1}{K^3}\right)$$

$$\leqslant M_1 + 2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{K^2}\right)$$

$$\leqslant M_1 + 2\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^2} = M_1 + \frac{\pi^2}{3} = M$$

综合(1)、(2) 得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项和 A_n 有界。

于是定理 1 的必要性得证。

2　函数项级数中狄利克雷定理

类似地关于函数项级数中判别收敛性的狄利克雷定理可以改述为如下定理。

定理 2　函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛的充分必要条件是：存在分解式 $u_n(x) = a_n(x)b_n(x)$，使得函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 部分和在区间 $[a,b]$ 上一致有界，且函数序列 $b_n(x)$ 对一切 $x \in [a,b]$ 是单调减少且一致趋近于零。

证　充分性　可参见有关教材。

必要性　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，那么，对于任意正数 ε，必存在正整数 N(是与 x 无关的)，使得当 $K > N$ 时，对一切 $x \in [a,b]$ 都有 $\left|\sum\limits_{n=K}^{\infty} u_n(x)\right| < \varepsilon$ 成立。

于是，对于 $\varepsilon = i^{-3}$(i 为正整数)，必存在 N_i(是与 x 无关的，$N_i > N_{i-1}$)，使得当 $K > N_i$ 时，对一切 $x \in [a,b]$，都有 $\left|\sum\limits_{n=K}^{\infty} u_n(x)\right| < i^{-3}$，$(i = 1,2,\cdots)$

令　$I = \{x \mid \left|\sum\limits_{i=1}^{N_1} u_i(x)\right| < 1,\quad a \leqslant x \leqslant b\}$

$$S(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x\in I \text{ 时}\\ \sum\limits_{i=1}^{N_1}|u_i(x)| & \text{当 } x\in[a,b] \text{ 且 } x\overline{\in} I \text{ 时}\end{cases}$$

作函数序列

$$b_n(x)=\begin{cases}S(x) & \text{当 } 1\leqslant n\leqslant N_1\\ i^{-1} & \text{当 } N_i<n\leqslant N_{i+1},\quad i=1,2,3,\cdots\end{cases}$$

$$a_n(x)=\frac{u_n(x)}{b_n(x)},\quad x\in[a,b],\quad n=1,2,3,\cdots$$

则　$u_n(x)=a_n(x)b_n(x)$，且 $b_n(x)$ 对一切 $x\in[a,b]$ 是单调减少的，且在 $[a,b]$ 上一致趋近于零。以下证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 的部分和在 $[a,b]$ 上是一致有界。

令　$A_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{u_i(x)}{b_i(x)}$

(1) 当 $n\leqslant N_1$ 时，$A_n(x)=\dfrac{1}{S(x)}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i(x)$，所以

$$|A_n(x)|\leqslant\frac{1}{S(x)}\sum_{i=1}^{n}|u_i(x)|\leqslant\frac{1}{S(x)}\sum_{i=1}^{N_1}|u_i(x)|\leqslant 1$$

则 $A_n(x)$ 是一致有界。

(2) 当 $n>N_1$ 时，必存在正整数 K，满足 $N_K<n\leqslant N_{K+1}$，这时

$$\begin{aligned}A_n(x)&=\sum_{i=1}^{N_1}\frac{u_i(x)}{b_i(x)}+\sum_{i=N_1+1}^{N_2}\frac{u_i(x)}{b_i(x)}+\sum_{i=N_2+1}^{N_3}\frac{u_i(x)}{b_i(x)}+\cdots+\sum_{i=N_{K-1}+1}^{N_K}\frac{u_i(x)}{b_i(x)}+\sum_{i=N_K+1}^{n}\frac{u_i(x)}{b_i(x)}\\&=\frac{1}{S(x)}\sum_{i=1}^{N_1}u_i(x)+\sum_{i=N_1+1}^{N_2}u_i(x)+2\sum_{i=N_2+1}^{N_3}u_i(x)+\cdots+(K-1)\sum_{i=N_{K-1}+1}^{N_K}u_i(x)\\&\quad+K\sum_{i=N_K+1}^{n}u_i(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|A_n(x)|&\leqslant\frac{1}{S(x)}\Big|\sum_{i=1}^{N_1}u_i(x)\Big|+\Big|\sum_{i=N_1+1}^{N_2}u_i(x)\Big|+2\Big|\sum_{i=N_2+1}^{N_3}u_i(x)\Big|+(K-1)\Big|\sum_{i=N_{K-1}+1}^{N_K}u_i(x)\Big|\\&\quad+K\Big|\sum_{i=N_K+1}^{n}u_i(x)\Big|\\&\leqslant 1+\Big(\Big|\sum_{i=N_1+1}^{\infty}u_i(x)\Big|+\Big|\sum_{i=N_2+1}^{\infty}u_i(x)\Big|\Big)+2\Big(\Big|\sum_{i=N_2+1}^{\infty}u_i(x)\Big|+\Big|\sum_{i=N_3+1}^{\infty}u_i(x)\Big|\Big)+\cdots\\&\quad+(K-1)\Big(\Big|\sum_{i=N_{K-1}+1}^{\infty}u_i(x)\Big|+\Big|\sum_{i=N_K+1}^{\infty}u_i(x)\Big|\Big)+K\Big(\Big|\sum_{i=N_K+1}^{\infty}u_i(x)\Big|+\Big|\sum_{i=n+1}^{\infty}u_i(x)\Big|\Big)\\&\leqslant 1+\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}\right)+2\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots+(K-1)\left(\frac{1}{(K-1)^3}+\frac{1}{K^3}\right)+K\left(\frac{1}{K^3}+\frac{1}{K^3}\right)\\&\leqslant 1+2\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{K^2}\right)\\&\leqslant 1+2\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{K^2}=1+\frac{\pi^2}{3}\end{aligned}$$

综合(1)、(2)得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 的部分和 $A_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一致有界的。从而定理 2 的必要性得证。

3　无穷积分中狄利克雷定理

无穷积分中有关收敛性的判别法狄利克雷定理同样可以改作为如下定理。

定理 3　无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛的充分必要条件是:存在分解式$f(x)=g(x)\varphi(x)$,使得函数$\varphi(x)$在$[a,+\infty)$上单调减少且$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$,对于任意常数$b(b>a)$积分$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$存在且有界。

现对此定理的必要性部分证明如下。

证　设$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛,则对任意正数$\varepsilon$,必存在正数$B$,使得当$b>B$时$(B>a)$,有

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

成立。那么,对于$\varepsilon=i^{-3}$,必存在正数$B_i(B_i>a$且$B_i\geqslant B_{i-1}$,使得当$b>B_i$时,有

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{1}{i^3},\qquad (i=1,2,3,\cdots)$$

令

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } a\leqslant x\leqslant B_1 \text{ 时}\\ \dfrac{1}{i} & \text{当 } B_i<x\leqslant B_{i+1},\quad i=1,2,3,\cdots \text{ 时}\end{cases}$$

$$g(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}\qquad (a\leqslant x<+\infty)$$

则　$f(x)=\varphi(x)g(x)$且$\varphi(x)$在$[a,+\infty)$上是单调减少的,且$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$。

下面证明积分$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$关于b是有界的。

对于任意常数$b>a$,因为$f(x)$在$[a,b]$上可积,则$|f(x)|$在$[a,b]$也可积。

(1) 当$b\leqslant B_1$时,$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,故$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$存在。

$$\left|\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^{B_1}|f(x)|\mathrm{d}x=M_1$$

M_1是一确定常数。那么$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$有界。

(2) 当$b>B_1$时,一定存在正整数K,使得$B_K<b\leqslant B_{K+1}$,这时

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x&=\int_a^{B_1}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\mathrm{d}x+\int_{B_1}^{B_2}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\mathrm{d}x+\int_{B_2}^{B_3}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\mathrm{d}x\\&\quad+\cdots+\int_{B_{K-1}}^{B_K}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\mathrm{d}x+\int_{B_K}^{b}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\mathrm{d}x\\&=\int_a^{B_1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{B_1}^{B_2}f(x)\mathrm{d}x+2\int_{B_2}^{B_3}f(x)\mathrm{d}x\\&\quad+\cdots+(K-1)\int_{B_{K-1}}^{B_K}f(x)\mathrm{d}x+K\int_{B_K}^{b}f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

所以积分$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$一定存在。

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right|&\leqslant\left|\int_a^{B_1}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{B_1}^{B_2}f(x)\mathrm{d}x\right|+2\left|\int_{B_2}^{B_3}f(x)\mathrm{d}x\right|+\cdots\\&\quad+(K-1)\left|\int_{B_{K-1}}^{B_K}f(x)\mathrm{d}x\right|+K\left|\int_{B_K}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_a^{B_1}|f(x)|\mathrm{d}x+\left(\left|\int_{B_1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{B_2}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|\right)\\&\quad+2\left(\left|\int_{B_2}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{B_3}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|\right)+\cdots\end{aligned}$$

$$+(K-1)\left(\left|\int_{B_{K-1}}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{B_K}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|\right)$$

$$+K\left(\left|\int_{B_K}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{b}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|\right)$$

$$\leqslant M_1+\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}\right)+2\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$$

$$+(K-1)\left(\frac{1}{(K-1)^3}+\frac{1}{K^3}\right)+K\left(\frac{1}{K^3}+\frac{1}{K^3}\right)$$

$$\leqslant M_1+2\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{K^2}\right)$$

$$\leqslant M_1+2\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{K^2}=M_1+\frac{\pi^2}{3}=M$$

M 为确定的正的常数。

综合(1)、(2) 得对于任意常数 $b>a$，积分$\int_a^b g(x)f(x)$ 一定存在有界，定理必要性得证。

参考文献

江泽坚．数学分析．人民教育出版社．1978

(上接第110页)

$$D=\begin{bmatrix}a_{j_1j_1} & a_{j_1j_2} & \cdots & a_{j_1j_k}\\ a_{j_2j_1} & a_{j_2j_2} & \cdots & a_{j_2j_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{j_kj_1} & a_{j_kj_2} & \cdots & a_{j_kj_k}\end{bmatrix}$$

其中 $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n$。因 D 的第 m 行是由 A 的第 j_m 行去掉若干非对角线元素而得到，因此 $\sigma_{j_m}(A)\geqslant\sigma_m(D)$，$m=1,\cdots,k$。所以对任意 $p,m(1\leqslant p,m\leqslant k;p\neq m)$，有

$$|a_{j_pj_p}a_{j_mj_m}|>\sigma_{j_p}(A)\sigma_{j_m}(A)\geqslant\sigma_p(D)\sigma_m(D)$$

因而 D 为广义对角占优实矩阵，又因 D 的对角线元素(亦为 A 的对角线元素)皆为正，由推论2，$\det D>0$。

(2)由于 $\det A\neq0$，所以 A^{-1}存在，且 $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}A_{11} & & *\\ & A_{22} & \\ & & \ddots\\ * & & A_{nn}\end{bmatrix}$，其中 A_{jj}为 A 的元素 a_{jj}的代数余子式，由(1)显然有 $A_{jj}>0$，$j=1,\cdots,n$，而 $\det A>0$，从而 A^{-1}对角线元素皆为正。

参考文献

1　佟文廷．关于几类矩阵特征值分布．数学学报．1977，20(4)：272～275

2　张家驹．共轭对角占优矩阵的特征值分布．数学学报．1980，23(4)：544～546

3　Pullman，N. J. Matrix Theory and Applications. Marcel Dekker Inc. New York and Basel. 1976：209～227