加强数学教学中横向、纵向联系

许志刚
(连云港化工高等专科学校,连云港,222001)

摘 要 本文论述了在数学教学中,每门课上下的纵向联系以及数学各分支之间的横向联系。
关键词 纵向联系 横向联系

一、数学教学中的纵向联系

数学上经常碰到这样的问题:一些定理或习题就当时所学知识解决起来,比较困难或者解决方法比较繁琐,但如果在学了后面更深的知识以后,再来解决这些问题,能得到很多简捷的方法。用旧知识解决新问题,同时也要注意用新知识解决以前学过的旧问题,让学生掌握数学上、下的一致性、整体性,扩大思路,体会到数学这门课的系统性、连贯性,即应加强数学教学中的纵向联系。真正掌握数学工具。下面举一例说明:

例1 "定理 设 $An\times s, Bs\times m$ 为矩阵,证明:秩$(AB)\leqslant\min\{$秩A,秩$B\}$"。

在教材上,此定理多采用矩阵乘法法则,得到矩阵 AB 的行向量组可经矩阵 B 的行向量组线性表示,再推出 $R(AB)\leqslant R(B)$,利用向量组与秩的关系,证出定理。当我们学了线性方程组基础解系的知识后,可用下法解决。

定理证明 作两个方程组:$(AB)X=0$——(1);$BX=0$——(2)。注意:$(AB)_{n\times m}, X_{m\times l}$, $B_{s\times m}, X_{m\times 1}$。显然,方程组(2)的解也是方程组(1)的解。由线性方程组基础解系所含向量个数与系数矩阵秩的关系,知:方程组(1)的基础解系含向量个数为 $m-R(AB)$,方程组(2)的基础解系含向量个数为 $m-R(B)$。此可得 $m-R(B)\leqslant m-R(AB)$,即证出 $R(AB)\leqslant R(B)$。下证 $R(AB)\leqslant R(A)$。因为 $R(AB)=R(AB)'=R(B'A')\leqslant R(A')=R(A)$。所以,综上有 $R(AB)\leqslant\min\{R(A),R(B)\}$。证毕。

由此例可见,线性方程组解与系数矩阵秩的关系,可用来解决前面矩阵秩的一些问题,方法比教材上的证明简捷。这样,既复习了旧知识,又加强了线性方程组基础解系知识运用的理解,使他们成为不可分割的有机统一体,使学生在解题中体会、复习、巩固、提高。

二、数学教学中的横向联系

另一方面,数学有许多分支,学生在学习过程中,往往把它们独立起来,孤立地理解。其实,数学的每个分支之间都是紧密联系的,代数与数学分析、方程、概率、统计、离散数学等都相互渗透,互有运用,互相依存,只是研究方向不同。往往这方面的问题可由另一方面的知识来解决,这样,使思路得到开扩,同时领会到各分支之间的联系,所以我们在数学中应加强这种横向联系,在联系中比较、理解、创新、进步,下面举例说明:

例2 "证明哥西积分不等式:设 $f(x), g(x)$ 在$[a,b]$上可积,则 $\left[\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant$

$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \quad (b > a)$"

证法 1　$\int_a^b [\lambda f(x) + g(x)]^2 \mathrm{d}x = \lambda^2 \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x) + \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$

若 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f(x)\equiv 0$，原不等式等号成立。

设 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x>0$，则上述关于 λ 的一元二次方程与 x 轴至多有一个交点，$\triangle\leqslant 0$，即

$$\triangle = [2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x]^2 - 4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$$

则

$$[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \qquad \text{证毕。}$$

下面给出另一证法。

证法 2　由数列的 Cauchy 不等式：$(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$，取 $a_i = f(x_i)\cdot\sqrt{\triangle x_i}$，$b_i = g(x_i)\cdot\sqrt{\triangle x_i}$　$i = 1,2,\cdots,n$，(这里 $\triangle x_i$ 是区间 $[a,b]$ 划分后第 i 个小区间长度)。代入上式得

$$[\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\triangle x_i]^2 \leqslant [\sum_{i=1}^n f^2(x_i)\triangle x_i]\cdot[\sum_{i=1}^n g^2(x_i)\triangle x_i] \qquad (*)$$

由 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，知 $f^2(x)$，$g^2(x)$，$f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 均可积。令 $n\to\infty$，对($*$)式两边取极限，由定积分定义，知 $[\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$。证毕。

此例两种解法，思路完全不同。证法 1 用初等代数中的一元二次函数的性质和符号讨论来解决，而证法 2，利用数列的 Cauchy 不等式，依据定积分定义，巧妙地把 Cauchy 不等式在两个方面的不同形式联系起来，同时加深了定积分是和式极限这个概念的理解。

三、综合运用纵、横向联系，提高知识的应用能力

综上我们在教学中应善于利用同一分支的纵向联系，不同分支的横向联系，这种联系既可以解决一些疑难问题，又可以把各种问题融在一起，有机结合，把数学看作一个整体，全面分析，达到融会贯通，前后呼应的功效。教师可以在课堂上把一些有联系的问题提出，让学生去思考。比如上面的 Cauchy 不等式，在许多方面都有不同的形式，学生也会有这样的疑问：为什么都叫 Cauchy 不等式，那么让他们找出联系。在数学中遇到疑难问题，可提示学生用其它知识来解决。学了一些新知识后，再回过来解决前面问题，学生会发现解决起来更方便、简捷。在总复习时，可总结某些典型问题的各种解法，也可让学生总结，把各人的不同思维方式总结起来，便于学习、交流和复习。比如有人就总结出求极限的方法达数十种。在这种总结、比较、联系中，可以牢固掌握数学这门基础课，使之更好的在实践中同其他应用学科联系起来，解决实际问题。

参考文献

1　北京大学数学力学系代数小组编. 高等数学

2　[日]堑江诚夫·桑原编. 微积分学讲解. 四川人民出版社.