

归纳和类比在高等数学教学中的运用

于 涛

(盐城工业专科学校, 盐城, 224003)

著名数学家拉普拉斯曾说过, 归纳和类比是“发现真理的重要工具”。在数学教学中加强对 学生进行归纳和类比方法的训练, 有助于从一个方面提高学生的思维能力。以下结合自己在教 学中的体会, 谈一些看法。

一、归纳推理在高等数学教学中的运用

归纳是一种凝聚型的思维形式。归纳推理是从观察开始, 对各个特殊事物进行综合分析, 从个别特殊的判断中提炼出对同类事物具有普遍性的判断来。归纳的方法在微积分学中几乎 处处可见, 诸如极限、连续、导数、微分和积分等概念都是从运动着的客观世界中归纳、抽象出 来的。一般说来, 许多老师在教学中对上述概念比较重视, 对归纳推理能力的训练却重视不够, 往往是新定理的引入只简单地写出定理并给予证明, 而忽略了该方法所体现的创造性思维。

一个定理总有它是如何被发现的问题。一些重要定理的发现, 往往经过数学家一段时期的 努力才变得那么完善严密, 当然在数学中既无必要也无可能按历史发展的原来面貌与过程去 讲, 但引入一个新定理时, 应考虑把归纳推理方法的训练安排在教学过程中。例如, 学生在掌握 基本初等函数的求导法则之后, 在求 $y = \sin \cos x$, $y = \sqrt{\ln x}$, $y = \exp x^2$ 等函数的导数时, 还是 有困难的。象先前那样直接从定义出发导出求导法则, 在这里已不能解决问题, 这就迫使我们 寻求新的求导法则。不过从上述这一类函数中可归纳出一个共同的特点, 这就是函数中都包含 着某个中间变量, 如 $y = \sin \cos x$, 可令 $u = \cos x$ 为中间变量, 于是有 $y = \sin u$, 对 u 及 $u = \cos x$ 对 x 的导数都还会求, 函数 $y = \sqrt{\ln x}$, $y = \exp x^2$ 等也有相仿的情况。

求这类函数的导数所面临的共同困难, 启发我们必须考虑如下的一般问题: 设 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, 分别对 u, x 可导, 且 $u = \varphi(x)$ 的值域落在 $f = f(u)$ 的定义域内, 问是否存在对复合函 数 $y = f[\varphi(x)]$ 关于 x 的一般求导法则? 如有, 法则应是怎样的? 为了解决这个问题, 必须看一 看已经掌握了哪些知识。教学到此进程上, 学生已经知道, 设在 x 处给增量 Δx , 随之在 u 处有 增量 Δu , 在 y 处有增量 Δy , 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x)$, $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$ 。又因为 $\varphi(x)$ 可导, 所以连 续。故有 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$ 。现要看 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 等于什么? 考虑到 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$, 会联想到有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

即

$$f'[\varphi(x)] = f'(u)u'(x)$$

至此, 我们可以联想出, 这也许是一个新的法则, 即复合函数求导法则。不过, 再仔细检查, 可以 发现证明过程应限制 Δu 恒不为零。事实上, 对有些复合函数, 不论 Δx 如何小, 它都始终可取 到零值。例如由函数

$$y = f(u) = \exp(u) - 1, \quad u = \varphi(x) = \begin{cases} x^2 \left| \sin \frac{1}{x} \right| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

复合而成的函数

$$y = \begin{cases} \exp\left(x^2 \left| \sin \frac{1}{x} \right| \right) - 1 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x=0$ 处和相应的 $u=0$ 处, 虽然有

$$f'(u)|_{u=0} = \exp(u)|_{u=0} = 1 \text{ 及 } \varphi'(x)|_{x=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \left| \sin \frac{1}{\Delta x} \right|}{\Delta x} = 0$$

但在 $\Delta x \rightarrow 0$ 的过程中, $\Delta u = (\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x}$ 始终可取到一系列的零值, 上述的证明方案对该例并不适用。但是, 这一证明方案对许多函数 (只要 Δu 恒不为零) 是适用的, 因而证明的结果对许多函数也是成立的。至此不仅要问, 虽然上述的论证方法已失去其一般性, 但许多函数都适合; 这个论证结果是否具有一般性呢? 这种归纳推理是理所当然的, 也是非常重要的, 为此, 不妨就刚才的例子具体验证一下:

$$\therefore 0 \leq \left| \frac{\exp\left((\Delta x)^2 \left| \sin \frac{1}{x} \right| \right) - 1}{\Delta x} \right| \leq \left| \frac{\exp(\Delta x)^2 - 1}{(\Delta x)^2} \cdot \Delta x \right|$$

而

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\exp(\Delta x)^2 - 1}{(\Delta x)^2} \cdot \Delta x \right| = 0$$

$$\therefore (f[\varphi(x)])'|_{x=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\exp\left((\Delta x)^2 \left| \sin \frac{1}{\Delta x} \right| \right) - 1}{\Delta x} = 0$$

再利用前面的结论: $(f[\varphi(x)])'|_{x=0} = f'(u)|_{u=0} \cdot \varphi'(x)|_{x=0} = 1 \cdot 0 = 0$

验证结果说明, 原先的论证虽然对该例不适用, 但结果却是适用的。于是我们可以猜想, 这个法则也许具有一般性, 问题是如何寻找一个一般的证明方法。既然不能直接用定义的方法, 因而要设法将 Δy 用其它形式来表示, 由极限 $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$ 可得, $\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \varepsilon$ ($\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \varepsilon = 0$), $\Delta y = f'(u)\Delta u + \varepsilon \cdot \Delta u$, 至此, 问题变得容易解决了。

综上所述, 一方面归纳毕竟不同于论证, 应由不完全归纳得出的结论与通过论证得到证实的真理严格地区分开来; 另一方面, 由归纳一再得到证实的结论可启发我们去发现真理, 所以归纳推理是培养创造能力的一个重要手段。

二、类比推理在教学中的运用

与归纳思维相反, 类比是一种放射型的思维形式, 类比推理是从个别判断中的部分因素得到启发, 而推出另一个个别的判断。它所得出的结论的真实性是不确定的, 同样它不能看作一种严格的推理方法, 但能给人一种联想, 它在创造型思维中具有不可忽视的作用。例如, 函数 $f(x, y, z)$ 在可导点 (a, b, c) 处取极限值的必要条件是什么? 当然学生会自然联系到一元函数 $f(x)$ 在可导点 a 处取极值的必要条件 $f'(a) = 0$, 这就启发我们以局部变动的模式考虑行不行? 即如果假定 y, z 依次取 b, c , 而 $x \neq a$, $f(x, y, z)$ 成为一元函数, 此时, $x = a$ 处取得极值的必要

条件是 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 $x=a, y=b, z=c$ 处为零, 类似的 $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ 在 $x=a, y=b, z=c$ 处也为零。通过与一元函数的类比, 估计上述推测正确, 然后以上述思路去论证, 结果得到了预期的效果。类比推理在教学中的应用是十分广泛的, 多元微积分中许多概念、定理的发现和创造都是与一元微积分中相应概念和定理作类比的结果, 此外, 在微积分里, 经常能看到无限与有限作类比, 例如, 从有限个函数和的导数与积分到无穷级数的可微性与可积性; 从两个多项式相乘到两个无穷级数的相乘, 都运用了有限与无限作类比的方法。因此, 在教学中可大量运用类比的手法推测新定理和提出论证的思考方案, 不仅可巩固已有的知识, 更可提供学生借助类比推理进行创造性思维的机会。但应注意其中常常埋伏着许多危险的陷阱。例如原级数为:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4(n+1)} + \cdots = S$$

则

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots + 0 + \frac{1}{4n+2} + 0 - \frac{1}{4(n+1)} + \cdots = \frac{S}{2}$$

相加得到:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2(n+1)} + \cdots = \frac{3}{2}S$$

通项 $\frac{1}{4n+1}, \frac{1}{4n+3}$ 表示原级数的所有奇数项, 通项 $-\frac{1}{2(n+1)}$ (当 $n=0, 1, 2, \cdots$ 时) 表示原级数的所有偶数项, 项的位置交换后, 级数的和也随之改变, 即有限情况下成立的项的可交换性在无限情况下就未必成立。再如在学生的学习中, 往往也自觉不自觉地运用类比的方法, 这当然是十分宝贵的, 但有时并不完全了解类比推理要从两个对象都有某些相同或类似的属性, 并且其中的一个对象还有另外的某些属性为前提, 往往只作形式上的类比, 因而有时会导致错误, 这在求参数方程的高阶导数中表现得十分突出, 例如, 求参数方程 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 所确定的函数的

二阶导数解: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = -\operatorname{tg} t (t \neq \frac{n\pi}{2}, n \text{ 为整数})$, 一些学生在接着求二阶导数时, 直接连续写为 $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sec^2 t$, 这是他们常犯的具有典型性的错误, 他们认为, 既然一阶导数是某一函数 $f(t)$, 二阶导数自然是 $f'(x)$, 他们把参数方程所表示的函数与非参数方程所表示的函数的求导方法作了不自觉的类比, 而且把后者的结论直接套到前者上去, 他们忽视了由参数所确定的函数的一阶导数不能用 $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} t$ 一个式子表示, 而应表示为:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y' = -\operatorname{tg} t \end{cases} \quad (t \neq \frac{n\pi}{2}, n \text{ 为整数})$$

所以, 二阶导数应是:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3a\cos^4 t \sin t}$$

由此可见, 尽管类比推理存在着陷阱和不足, 但只要我们准确运用类比推理, 还是可以从中学到我们去发现真理的。

总之, 注意把类比和归纳的方法贯穿在教学中, 对培养创造性思维能力是有益的。