第8卷 第3期 1995年10月
盐城工业专科学校学报 Journal of Yancheng College of Technology
Vol. 8 No. 3 Oct. 1995

用待定系数法求不定积分

毛立新
(南京电力高等专科学校，南京，210013)

在计算形如$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x$的不定积分时，通常运用分部积分公式$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}v$来求解，这就遇到如何确定$u$和$v$的问题。另外根据题目特点，有时需多次运用分部积分公式，运算量比较大。本文给出这类积分的另一种解法——待定系数法。

1 $\int P_m(x)e^{\lambda x}\mathrm{d}x = Q_m(x)e^{\lambda x} + C$（其中$P_m(x)$，$Q_m(x)$表示$m$次多项式。）

例1 求$\int(x^4+x^2+1)e^{3x}\mathrm{d}x$

解 设$\int(x^4+x^2+1)e^{3x}\mathrm{d}x = (a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4)e^{3x}+C$

则

$$[(a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4)e^{3x}+C]' = (x^4+x^2+1)e^{3x}$$

即

$$\begin{aligned}3a_0x^4 + (3a_1+4a_0)x^3 + (3a_2+3a_1)x^2 + (3a_3+2a_2)x + 3a_4 + a_3 \\ = x^4+x^2+1\end{aligned}$$

比较两边系数，得

$$\begin{cases}3a_0 = 1 \\ 3a_1 + 4a_0 = 0 \\ 3a_2 + 3a_1 = 1 \\ 3a_3 + 2a_2 = 0 \\ 3a_4 + a_3 = 1\end{cases}$$

从而

$$a_0 = \frac{1}{3}, a_1 = -\frac{4}{9}, a_2 = \frac{7}{9}, a_3 = -\frac{14}{27}, a_4 = \frac{41}{81}$$

所以

$$\int(x^4+x^2+1)e^{3x}\mathrm{d}x = (\frac{x^4}{3} - \frac{4x^3}{9} + \frac{7x^2}{9} - \frac{14x}{27} + \frac{41}{81})e^{3x} + C$$

2 $\int P_m(x)(a\cos kx + b\sin kx)\mathrm{d}x = Q_{m1}(x)\cos kx + Q_{m2}(x)\sin kx + C$ （其中$P_m(x)$，$Q_{m1}(x)$，$Q_{m2}(x)$表示m次多项式）

例2 求$\int(x^2-x+1)(\cos 3x+\sin 3x)\mathrm{d}x$

解 设$\int(x^2-x+1)(\cos 3x+\sin 3x)\mathrm{d}x = (a_0x^2+a_1x+a_2)\cos 3x + (b_0x^2+b_1x+b_2)\sin 3x + C$，

则

$$[(a_0x^2+a_1x+a_2)\cos 3x+(b_0x^2+b_1x+b_2)\sin 3x+C]$$
$$=(x^2-x+1)(\cos 3x+\sin 3x)$$

即

$$\begin{cases}2a_0x+a_1+3(b_0x^2+b_1x+b_2)=x^2-x+1\\2b_0x+b_1-3(a_0x^2+a_1x+a_2)=x^2-x+1\end{cases}$$

比较系数,得

$$\begin{cases}3b_0=1\\2a_0+3b_1=-1\\a_1+3b_2=1\\-3a_0=1\\2b_0-3a_1=-1\\b_1-3a_2=1\end{cases}$$

解之得

$$a_0=-\frac{1}{3},a_1=\frac{5}{9},a_2=-\frac{10}{27};$$
$$b_0=\frac{1}{3},b_1=-\frac{1}{9},b_2=\frac{4}{27}$$

所以

$$\int(x^2-x+1)(\cos 3x+\sin 3x)\mathrm{d}x$$
$$=\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{9}x-\frac{10}{27}\right)\cos 3x+\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x+\frac{4}{27}\right)\sin 3x+C$$

3 $\int e^{\lambda x}(\cos 5x-3\sin kx)\mathrm{d}x=e^{\lambda x}(m\cos kx+n\sin kx)+C$

例 3 求 $\int e^{-2x}(\cos 5x-3\sin 5x)\mathrm{d}x$

解 设 $\int e^{2x}(\cos 5x-3\sin 5x)\mathrm{d}x=e^{-2x}(m\cos 5x+n\sin 5x)+C$

则 $[e^{-2x}(m\cos 5x+n\sin 5x)+C]'=e^{-2x}(\cos 5x-3\sin 5x)$

即 $-2(m\cos 5x+n\sin 5x)-5m\sin 5x+5n\cos 5x=\cos 5x-3\sin 5x$

比较两边系数得

$$-2m+5n=1;\ -2n-5m=-3$$

解之得 $m=\frac{13}{29},n=\frac{11}{29}$. 所以

$$\int e^{-2x}(\cos 5x-3\sin 5x)\mathrm{d}x=e^{-2x}\left(\frac{13}{29}\cos 5x+\frac{11}{29}\sin 5x\right)+C$$

4 $\int e^{\lambda x}P_m(x)(a\cos kx+b\sin kx)\mathrm{d}x=e^{\lambda x}(Q_{m1}(x)\cos kx+Q_{m2}(x)\sin kx)+C$ (其中 $P_m(x)$,$Q_{m1}(x)$,$Q_{m2}(x)$表示 m 次多项式)

例 4 求 $\int xe^{2x}(\cos 4x-3\sin 4x)\mathrm{d}x$

解 设 $\int xe^{2x}(\cos 4x-3\sin 4x)\mathrm{d}x=e^{2x}[(ax+b)\cos 4x+(cx+d)\sin 4x]+C$

则

$$\{e^{2x}[(ax+b)\cos 4x+(cx+d)\sin 4x]+C\}'=xe^{2x}(\cos 4x-3\sin 4x)$$

整理得

$$2(ax+b)+a+4(cx+d)=x;2(cx+d)-4(ax+b)+c=-3x$$

比较系数,得

$$\begin{cases}2a+4c=1\\2b+a+4d=0\\2c-4a_3=3\\2d-4b+c=0\end{cases}$$

解之得

$$a=\frac{7}{10},b=-\frac{9}{100},c=-\frac{1}{10},d=-\frac{13}{100}$$

所以

$$\begin{aligned}&\int xe^{2x}(\cos 4x-3\sin 4x)\mathrm{d}x\\&=e^{2x}\left[\left(\frac{7x}{10}-\frac{9}{100}\right)\cos 4x-\left(\frac{1}{10}x+\frac{13}{100}\right)\sin 4x\right]+C\end{aligned}$$

待定系数法除了能解决以上几种类型的不定积分外,还可用来求形如

$$\int\frac{c\sin x+d\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$$

的不定积分,具体做法如下:设

$$\begin{aligned}\int\frac{c\sin x+d\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x&=\int\frac{m(a\sin x+b\cos x)'+n(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x\\&=m\ln(a\sin x+b\cos x)+nx+C\end{aligned}$$

通过比较系数方程组,就可求出 m,n。

例5 求 $\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

解 设

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x&=\frac{m(\sin x+\cos x)'+n(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{(-m+n)\sin x+(m+n)\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

则

$$-m+n=1;m+n=0$$

即

$$m=-\frac{1}{2},n=\frac{1}{2}$$

所以

$$\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}x + C$$

例 6 求 $\int \frac{\cos x - 2\sin x}{\sin x - 2\cos x}dx$

解 设

$$\int \frac{\cos x - 2\sin x}{\sin x - 2\cos x}dx = \frac{m(\sin x - 2\cos x)' + n(\sin x - 2\cos x)}{\sin x - 2\cos x}dx$$

$$= \int \frac{(2m + n)\sin x + (m - 2n)\cos x}{\sin x - 2\cos x}dx$$

则

$$2m + n = -2;m - 2n = 1$$

即

$$m = -\frac{3}{5},n = -\frac{4}{5}$$

所以

$$\int \frac{\cos x - 2\sin x}{\sin x - 2\cos x}dx = -\frac{3}{5}\ln(\sin x - 2\cos x) - \frac{4}{5} + C$$

待定系数法在某些定积分的计算中也是非常有效的。

例 7 求 $\int_0^{2\pi}\cos(\sin\theta - 2\theta)d\theta$

解 $\int_0^{2\pi}\cos(\sin\theta - 2\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}[\cos 2\theta\cos(\sin\theta + \sin 2\theta\sin(\sin\theta)]d\theta$

设

$$\int[\cos 2\theta\cos(\sin\theta) + \sin 2\theta\sin(\sin\theta)]dx = f(\theta)\sin 2\theta + g(\theta)\cos 2\theta + C$$

其中 $f(2\pi+\theta)=f(\theta),g(2\pi+\theta)=g(\theta)$。则

$$\int_0^{2\pi}[\cos 2\theta\cos(\sin\theta + \sin 2\theta\sin(\sin\theta)]dx = [f(\theta)\sin 2\theta + g(\theta)\cos 2\theta]_0^{2\pi} = 0$$

即

$$\int_0^{2\pi}\cos(\sin\theta - 2\theta)d\theta = 0$$

参考文献

1 同济大学数学教研室编. 高等数学

2 高等数学讲义. 中央广播电视大学出版社