

关于 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 方程及图中两个问题的讨论

张光灿

(连云港市电视大学, 新浦, 222001)

引言

建立剪力、弯矩方程, 绘制剪力、弯矩图是材料力学课程的主要内容之一。许多教科书对这部分内容作了详尽的分析和介绍, 但大都忽视了其中两个问题, 一是 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 方程区间开闭性; 二是积分法绘制剪力、弯矩图在理论上的论证和实践中的应用。前者表明载荷的性质对剪力、弯矩方程的影响, 通过 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 图来反映梁的受力状况及特点, 具有很强的力学意义。后者为准确、迅速绘制 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 图提供行之有效的方法。

1 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 方程区间开闭性的确定

$Q(x)$ 、 $M(x)$ 方程的区间什么情况下是全闭的? 什么情况下是全开或半开半闭的? 决定区间开闭的直接原因是什么? 这些问题在教材中未作重点论述, 因此学生在学习这部分内容时也容易忽略, 在确定区间的开闭性时往往随心所欲、错误很多。针对以上问题, 笔者主要从数学意义、力学意义两方面进行讨论。

1.1 根据数学意义确定开闭性

考察两函数

$$y = x \quad -\infty < x < \infty$$
$$y = \begin{cases} x & x < 0 \\ 0.5 & 0 < x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

在 $(0, 1)$ 区间的开闭性, 其图象见图 1 及图 2。

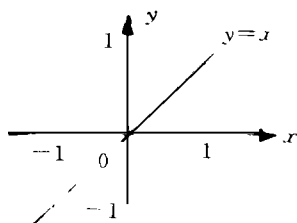


图 1

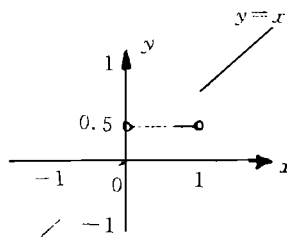


图 2

由图 1 可知: $y=x$ 在 $(0, 1)$ 处连续, 其区间为闭区间, 即: $0 \leq x \leq 1$ 。由图 2 可知: $y=0.5$ 在

$(0,1)$ 范围内连续,但在 $0,1$ 处发生突变,故为开区间,即: $0 < x < 1$ 。因此,可得出如下结论:如果区间两端点处函数值不发生突变或者说“连续”,那么方程的区间为闭区间,反之为开区间。

1.2 根据载荷性质确定区间的开闭性

作用在梁上的载荷主要有三种:集中力、集中力偶和分布载荷,它们决定着梁的内力分布情况,也影响着 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 的形状。下面讨论不同的载荷性质对 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 方程区间的开闭的影响,所得结论可以作为判断区间开闭性的根据。

1.2.1 集中力对作用点处 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 值的影响

例:有一简支梁如图3所示,讨论其 C 处的 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 值。取 dx 段为研究对象,由平衡条件 $\sum Y=0$, $Q_c^- + q(x)dx = p + Q_c^+$, 令 $dx \rightarrow 0$, 则有 $Q_c^- = p + Q_c^+$ 成立,因此,在集中载荷作用处 Q 值发生突变,突变值为 P ; $\sum M_c=0$, $M_c^- + P \cdot dx + Q_c^+ \cdot dx = q(x) \cdot (dx) + M_c^+$, 令 $dx \rightarrow 0$, 则有 $M_c^- = M_c^+$ 成立。因此,在集中载荷作用处 M 值连续,不发生突变。

1.2.2 集中力偶对其作用处 Q 、 M 值的影响

例:有一简支梁受力如图4,讨论其 C 处的 Q 、 M 值。同理有 $Q_c^- = Q_c^+$, Q 值在 M 作用处连续。

$M_c^+ = M + M_c^-$, M 值在 m_1 作用处发生突变。

1.2.3 $q(x)$ 对“起、止”端处 Q 、 M 值的影响

同理有: $Q_c^- = Q_c^+$ $M_c^- = M_c^+$ $Q_b^- = Q_b^+$ $M_b^- = M_b^+$ 。 Q 、 M 值在 B 、 C 处均连续。

所以, P 、 $q(x)$ 、 m_1 对其作用处的 Q 、 M 值

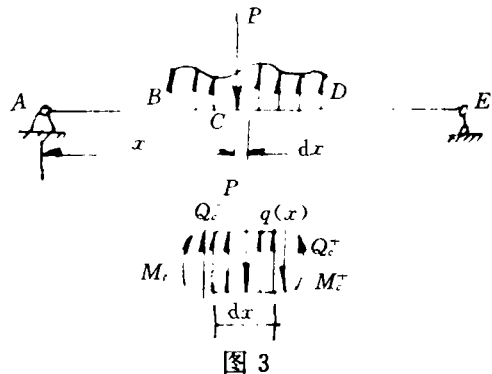


图3

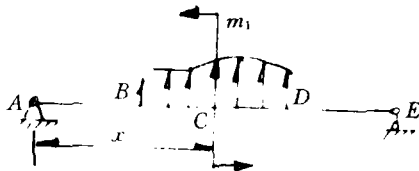


图4

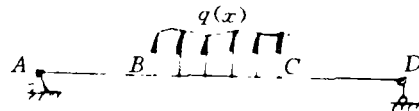


图5

的影响结果如表1。

表1

	$Q(x)$	$M(x)$
p	突变	连续
m_1	连续	突变
q	连续	连续

表2

	$Q(x)$ 区间	$M(x)$ 区间
p	开	闭
m_1	闭	开
q	闭	闭

由于梁 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 方程是以 P 、 M 和 q 起止端点为分界点而分成一个个区间,而区间的开闭取决于该处 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 是否连续,综合载荷性质对 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 值的影响结果,这就表明了载荷性质是决定方程区间开闭直接原因,影响结果如表2所示。

2 用“积分法”绘制剪力、弯矩图

绘制 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 图的方法很多,其中关键问题是求各段 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 图的端值。如果用积分法绘图,则可将端值简化为对 $q(x)$ 、 $Q(x)$ 图形面积的计算。这样就可以既快又准确地绘出 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 图。证明如下:

2.1 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 值与 $q(x)$ 、 $Q(x)$ 分布图之间的关系

(1) 有一悬臂梁,受力如图 6 所示,设 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 图为已知。首先,取 X 段为研究对象如(a)图

$$\sum F_y = 0$$

$$Q(x) = \sum q(x)dx = \int_0^x q(x)dx$$

$$\sum M_c = 0$$

$$M(x) = \sum \int_0^x q(x)dx \cdot d(x) = \int_0^x Q(x)dx$$

因为 $q(x)$ 和 $Q(x)$ 是连续有界,所以可积。由定积分的几何意义:

$$Q(x) = S_{abb'} \quad M(x) = S_{cdd'}$$

上式说明,分布在 X 处引起的内力 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 分别为面积 $S_{abb'}$ 和 $S_{cdd'}$ 。

(2) 图 7 所示一复杂梁,其受力图及 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 图为已知。

AB 段:取研究对象如(b)图

$$\sum Y = 0$$

$$Q(x) = Ra + \int_0^x q(x)dx$$

$$\because q(x) = 0$$

$$\therefore Q(x) = Ra, \text{ 且当 } X_1 = a, Q(a) = Ra$$

$$\sum M_c = 0$$

$$M(x) = Ra \cdot X_1 + \int_0^x \int_0^x q(x)dx \cdot d(x)$$

$$\because q(x) = 0$$

$$\therefore M(x) = Ra \cdot X_1 = S_{aa'b'}$$

且当 $X_1 = a$ $M(x) = S_1$ (S_1 见 d 图)

BC 段:取研究对象如(c)图

$$\sum Y = 0$$

$$Q(x) = Ra + \int_a^{x_1} q(x)dx - p$$

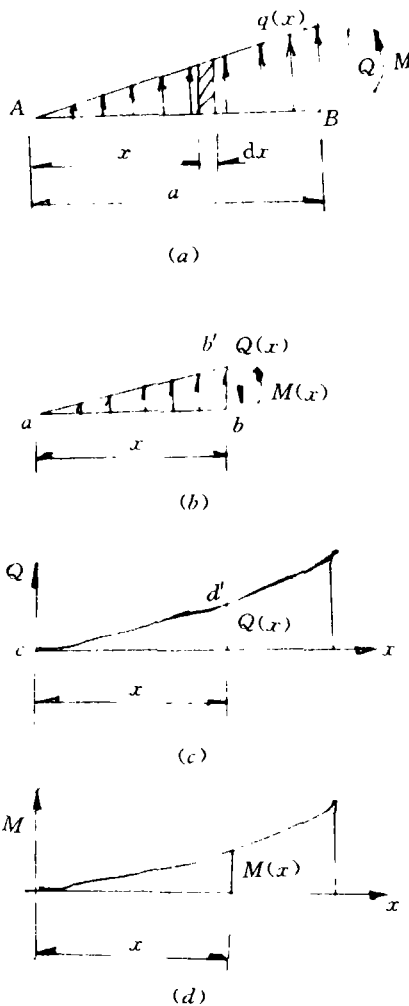


图 6

$$= Ra - p + S_{dd'ee'}$$

$$\therefore Qb^+ = Ra - p$$

$$\therefore Q(x_2) = Qb^+ + S_{dd'ee'}, a, \text{ 且当 } X_2 = 2a \text{ 时,}$$

$$Q(2a) = Qb + S_{dd'gg'} (S_{dd'gg'}, \text{ 见 a 图})$$

$$\Sigma Mc = 0$$

$$M(x_2) = Ra \cdot x_2 - P(x_2 - a)$$

$$+ \int_a^{x_2-a} Q(x) dx$$

$$= Ra \cdot a + (Ra - p)(x_2 - a)$$

$$+ \int_0^{x_2-a} Q(x) dx$$

$$= Mb^+ + S_{mm'nn'}$$

$$M(x_2) = S_1 + S_{mm'nn'} (S_{mm'nn'}, \text{ 见图 7d})$$

$$\text{式中 } Mb^+ = S_1 \quad S_{mm'nn'} = [Ra - p](x_2 - a) + \int_0^{x_2-a} Q(x) dx] (\text{证略})$$

$$\text{且当 } x_2 = 2a \quad Mc = S_1 + S_2 + S_3 (\text{见图 7d})$$

同理找出 CD 段 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 与 $q(x)$ 、 $Q(x)$ 分布面积间的关系。因此, 利用积分法 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 图可分别转化成对 $q(x)$ 和 $Q(x)$ 面积计算。证毕。

2.2 用“积分法”绘制 $Q(x)$ 、 $M(x)$ 图的步骤

如图 8 所示为一简支梁, 已知 q 、 a 、 $M = qa$ 、 $p = 2qa$, 试绘制 Q 、 M 图。

解: (1) 求支反力

$$Ra = qa \quad Re = qa$$

(2) 由微分关系 $\frac{dQ(x)}{dx} = q(x)$ 确定 $Q(x)$ 图的形状。

段	AB	BC	CD	DE
$q(x)$	$q=0$	$q>0$	$q=0$	$q=0$
$Q(x)$				
形状	—	/	—	—

(3) 绘制 $Q(x)$ 图 (包括求端值)

这里集中力 $p \uparrow$ 使 Q 图在该点向上突变。

(4) 由微分关系

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$$

确定 $M(x)$ 图的形状。

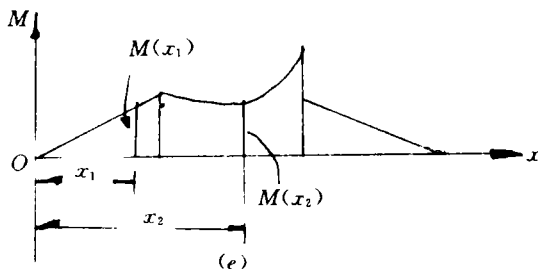
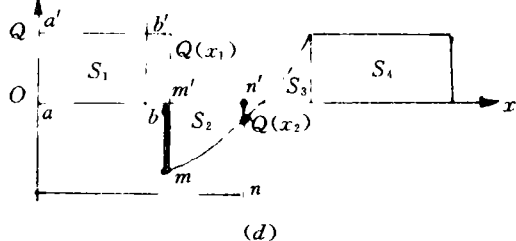
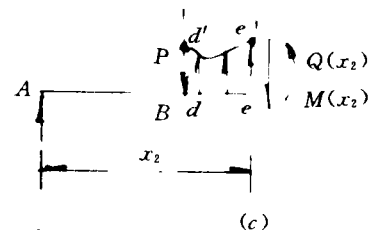
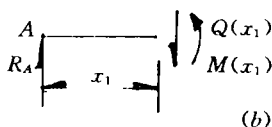
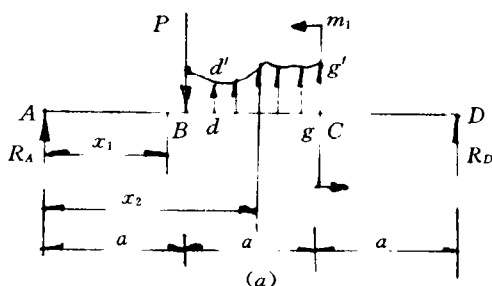


图 7

段	AB	BC	CD	DE
$Q(x)$				
$M(x)$				

(5) 绘制 $M(x)$ 图(包括求端值)

这里集中力偶 M 顺时针转向使 M 图中该点向上突变。

2.3 几点说明

(1) “积分法”使用条件

① $q(x)$ 向上($\uparrow$)为正; ② x 轴正方向指向右边; ③ $Q(x)$, $M(x)$ 图绘制必须自左向右逐段绘出。

(2) 极值的计算方法

① 先确定极值点的位置(根据 Q 图中 $Q(x)$ 为零的点); ② 由 Q 图形的面积计算出 M 的最大值; ③ ①对 Q 图, 如梁中有集中力如 AB 段(BC 段)。

$$Qb^- = Qa^+ + S(q(x))$$

$$Qc^- = Qb^+ + S(q(x))$$

②对 M 图, 如梁中有集中力偶作用(图 7(a) D 处), 则

$$Me^- = Md^+ + S(Qd \rightarrow e) = Md^+ + S_4$$

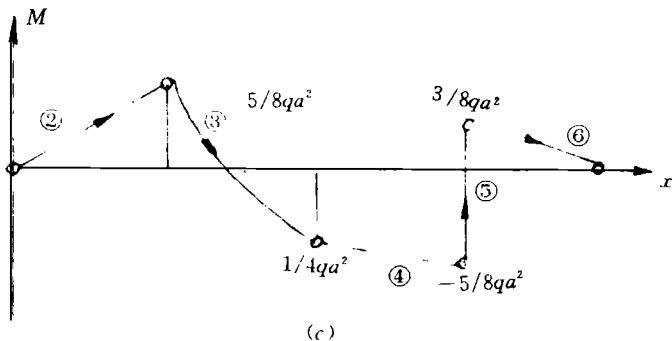
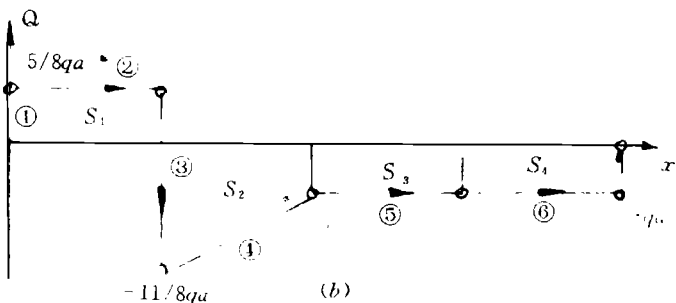
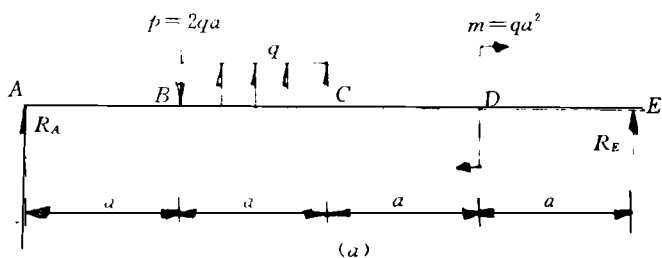


图 8