三参数 Weibull 分布参数的估计*

王 平
(盐城工专机械工程系，盐城，224003)

摘 要 主要给出了三参数 Weibull 分布参数极大似然法估计的一种方法。首先用矩阵法确定样本的均值、标准差和偏差系数；再利用现成的数表[1]粗略地进行分布参数的点估计，然后以这些点估计值作为迭代初始点，用牛顿法进行迭代计算求解由三参数 Weibull 分布确定的似然方程，最终求得分布参数的估计值。实例表明，结果是令人满意的。

关键词 Weibull 分布　参数估计　极大似然法

分类号 V23

一、问题的提出

航空发动机零部件的寿命通常遵循三参数 Weibull 分布[2]。但因为分布中有三个参数，给估计工作带来了较大的困难，如果对符合三参数 Weibull 分布的问题用二参数 Weibull 分布来处理，显然存在人为误差，因此有许多人一直在探讨三参数 Weibull 分布参数的估计方法。在各种方法中，目前最有效的仍是极大似然法。由于极大似然法在参数估计时，要进行超越方程的迭代求解，若迭代初始点选得不好，迭代过程不一定收敛。

本文提出先用矩阵法进行分布参数的粗略估计，然后以这些估计值作为迭代初始点，用牛顿法迭代求解似然方程，最后确定分布参数的估计值。方法简单，迭代收敛快。Monte Carlo 实例表明，该法对大小子样，结果均较满意。

二、极大似然估计及三参数 Weibull 分布似然方程的建立

极大似然估计(Maximum Likelihood Estimation)，简称MLE，是一种重要的估计方法，其基本思想是：设总体是连续型随机变量，其概率密度为 $f(x;Q_1,Q_2,\cdots Q_n)$，此时数据$(x_1,x_2,\cdots x_n)$出现的概率为：

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;Q_1,Q_2,\cdots Q_n)dx_i=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;Q_1,Q_2,\cdots Q_n)dx_1dx_2\cdots dx_n \tag{1}$$

式中 $dx_1,dx_2,\cdots dx_n$ 与分布参数 Q 无关，因而要求 $\hat{Q}_1$、$\hat{Q}_2$、$\cdots\hat{Q}_n$ 使概率最大，只要求 $\hat{Q}_1$、$\hat{Q}_2$、$\cdots\cdots\hat{Q}_n$ 使 $L(Q_1,Q_2\cdots Q_n)=\prod_{i=1}^{n} f(Q_i,Q_1,Q_2,\cdots Q_n)$达到最大即可，称 $L(Q_1,Q_2\cdots Q_n)$为似然函数。由于 $mL(Q_1,Q_2,\cdots Q_n)$和 $L(Q_1,Q_2,\cdots Q_n)$和 $L(Q_1,Q_2,\cdots Q_n)$同时达到最大，而在计算上用 $mL(Q_1,Q_2,\cdots Q_n)$比用 $L(Q_1,Q_2,\cdots Q_n)$方便，称 $mL(Q_1,Q_2,\cdots Q_n)$为对数似然函数。倘若 $mL(Q_1,Q_2,\cdots Q_n)$关于 Q_i 的偏导存在，则可用微分法求 $Q_1,Q_2,\cdots Q_n$ 的极大似然估计，即可由方

* 收稿日期：1995－11－29

程组

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial L(Q_1,Q_2,\cdots Q_n)}{\partial Q_1}=0\\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(Q_1,Q_2,\cdots Q_n)}{\partial Q_n}=0\end{array}\right\} \tag{2}$$

解出 $Q_1,Q_2,\cdots Q_n$ 的极大似然估计。而(2)式称为似然方程。

三参数 *Weibull* 分布的密度函数为

$$f(x;m,\eta,\gamma)=\frac{m}{\eta}(\frac{\gamma_i-\gamma}{\eta})^{m-1}\exp[-(\frac{x_i-\gamma}{\eta})^m] \tag{3}$$

上式中 m,η,γ 分别是 *Weibull* 分布的形状参数、尺度参数和位置参数。这样构造参数 m，η,γ 的似然参数。

$$Lf(x;m,\eta,\gamma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{m}{\eta}(\frac{x_i-\gamma^{m-1}}{\eta}\exp[-(\frac{x_i-\gamma}{\eta})^m] \tag{4}$$

相应似然方程为

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial mL}{\partial m}=\dfrac{\eta}{m}+\sum\limits_{i=1}^{n}m\dfrac{x_i-\gamma}{\eta}-\sum\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{x_i-\gamma}{\eta})^m m(\dfrac{x_i-\gamma}{\eta})=0\\ \dfrac{\partial mL}{\partial \eta}=-\dfrac{n}{\eta}-\dfrac{n(m-1)}{\eta}-\dfrac{m}{\eta}\sum\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{x_i-\gamma}{\eta})^m=0\\ \dfrac{\partial mL}{\partial \gamma}=(1-m)\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\gamma)^{-1}+\dfrac{m}{\eta}\sum\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{x_i-\gamma}{\eta})^{m-1}=0\end{array}\right\} \tag{5}$$

这是三个超越方程，需用数值方法进行迭代求解，在迭代求解过程中，若迭代初始点选得不好，迭代过程不一定收敛，本文提出用矩阵法先进行 m,η,γ 的粗略估计，然后以这些估计值作为迭代初始点，用牛顿法进行迭代计算，迭代过程能很快地收敛。

三、分布参数的矩法估计

Weibull 分布参数的矩法估计较为简单，但结果远不如极大似然估计。矩法估计是先求样本的均值、标准差和偏度系数，再利用现成的数表[1]即可方便地进行参数的点估计，若样本的大小为 n，则样本的均值为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{6}$$

样本标准差

$$S=[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2]^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

样本偏度系数

$$m_k=\frac{n}{(n-1)(n-2)s^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3 \tag{8}$$

由 m_k 值查表[1]得形状参数点估计值 $\hat{m}$，同时查得各系数 m_a,m_b 和 m_c。

尺度参数的点估计值为

$$\hat{\eta}=\frac{S}{m_b}$$

位置参数的点估计

$$\hat{\gamma}=\begin{cases}\bar{x}-\hat{\eta}m_a & \bar{x}-\hat{\eta}m_a\leqslant min\{x_i\}\\ min\{x_i\} & \bar{x}-\hat{\eta}m_a>min\{x_i\}\end{cases}$$

这样，我们就得到了分布参数的迭代初始点($\hat{m}$,$\hat{\eta}$,$\hat{\gamma}$)。

四、Monte Carlo 模拟

Monte Carlo 模拟就是在分布参数已知情况下，由计算机随机产生 n 个子样，然后对子样用极大似然法进行参数估计，将估计值与已知值相比较，进而可评定参数估计值的准确程度。通过对 $n=10$ 和 $n=20$ 子样的参数估计，我们不难发现极大似然法估计较矩阵法估计接近已知值，而且对大小子样用极大似然法进行参数估计，均可得到较满意结果。

例 1：当 $\gamma=200$，$\eta=150$，$m=1.5$ 由计算机随机产生 10 个数据。

240.80	241.31	289.48	313.48	338.27	353.96	364.57	374.58	493.11	762.17

矩法估计值　$\hat{\gamma}=240.80$，$\hat{\eta}=128.6$，$\hat{m}=0.89$

极大似然法估计值　$\hat{\gamma}=223.65$，$\hat{\eta}=163.72$，$\hat{m}=1.38$

例 2：当 $\gamma=200$，$\eta=150$，$m=1.5$ 产生 20 个子样。

200.00	200.01	203.02	203.13	209.21	210.54	220.52	231.85	233.01	257.59
264.95	316.04	317.51	362.20	398.10	436.48	659.11	962.91	1319.25	8096.41

矩法估计值　$\hat{\gamma}=235.1$，$\hat{\eta}=130.2$，$\hat{m}=1.18$

极大似然法估计值　$\hat{\gamma}=187.25$，$\hat{\eta}=157.23$，$\hat{m}=1.42$。

参考文献

1　徐　灏主编. 机械设计手册. 机械工业出版社. 1991
2　孔瑞莲. 发动机零部件的安全寿命确定. 航空动力学报. 1995，10(2)
3　戴树森等编著. 可靠性试验及其统计分析. 国防工业出版社. 1984

(上接第 43 页)

保护正当交易，惩戒违法违约行为。这将有助于建设市场中存在问题的解决，对于加强建设市场管理、维持良好的市场秩序显然是十分必要的。

4. 是开拓国际建筑市场的需要。改革开放以来，建设领域对外合作交流的范围日益扩大。但是，由于我国传统的建设管理制度与国外通行的惯例不同，致使我们的企业在对外工程承包和国内的外资工程建设中表现出许多不适应，减弱了在国际市场上的竞争能力。这就要求我们的建设管理制度与国际惯例接轨。因此，按照国际惯例办事、实行建设监理制度，使我国的建设管理制度与国际惯例接轨、加速我国建设市场与国际建设市场的融合，对于扩大建设领域的国际合作交流范围、进一步开拓国际建筑市场是大势所趋，势在必行。

全面实行工程建设监理制度，使我国的建设监督机制由单一的纵向行政监督转变为纵向的行政监督与横向的社会监理相结合的交叉监督；由单纯的行政手段转变为行政、经济、技术和法律等手段并用的多手段监督。我国的建设市场的监督机制将日趋完善，在这种机制作用下，将大大提高我国工程建设的投资效益、建筑企业的综合经济效益和社会效益。