

用有限元法研究复合材料层合板的热屈曲特性

余 斌

(盐城工学院基础科学部, 盐城, 224003)

摘 要 用有限元法对复合材料层合板的热屈曲特性进行了分析研究。通过对几个算例的分析比较, 表明本文的方法是精确的。给出了层合板屈曲的数值结果, 并讨论了铺层方向、铺层数量、板的长宽比、温度分布等因素对复合材料层合板热屈曲特性的影响, 由此得出了一些有用的结论。

关键词 复合材料 层合板 有限元法 热屈曲

分类号 TB33

引 言

本文在高阶位移模式的基础上, 从最小位能原理出发, 建立了一种适用于层合板热屈曲特性分析的有限元单元模型, 由算例表明单元性能良好, 具有一定的适用性, 并用此单元对层合板的屈曲临界温度随铺层方向、铺层数量、板的长宽比、温度分布等参数变化情况进行了分析讨论, 由此得到了一些有用的结论, 可供工程应用时参考。

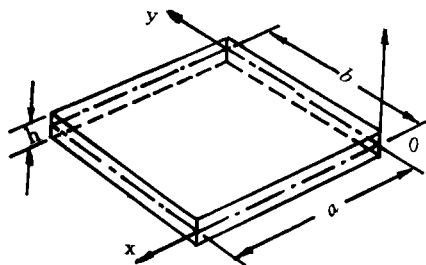


图1 板的尺寸及其坐标系

1 有限元单元模型的建立

如图1所示的坐标系。板长为 a , 板宽为 b , 板厚为 h 。

设层合板的位移场为^[2]

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - \frac{\partial w}{\partial x} z + f(z) \Phi_x(x, y) \quad (1)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - \frac{\partial w}{\partial y} z + f(z) \Phi_y(x, y) \quad (2)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (3)$$

式中: u_0, v_0 和 w 为中面沿 x, y 和 z 方向的位移; $f(z)$ 为给定函数, 可根据横向剪应力分布假设给定; $\Phi_x(x, y)$ 和 $\Phi_y(x, y)$ 为未知函数, 极坐标系同文^[2]。

结构的总位能

$$u = \sum_{n=1}^{N_E} u_e \quad (4)$$

式中 N_E 为单元总数。

对于每个单元沿厚度方向积分, 则有

$$\begin{aligned}
 u_e = & \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [\{\epsilon_0\}^T [A] \{\epsilon_0\} + \{\epsilon_0\}^T [B] \{k\} + \{\epsilon_0\}^T [F] \{d\varphi\} + \{k\}^T [B] \{\epsilon_0\} + \\
 & \{k\}^T [D] \{k\} + \{k\}^T [E] \{d\varphi\} + \{d\varphi\}^T [F] \{\epsilon_0\} + \{d\varphi\}^T [E] \{k\} + \\
 & \{d\varphi\}^T [GG] \{d\varphi\} + \{\varphi\}^T [D_s] \{\varphi\} - 2(\{\epsilon_0\}^T \{N_T\} + \{k\}^T \{M_T\} + \\
 & \{d\varphi\}^T \{M_T^*\})] dx dy + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \{\epsilon_{ng}\}^T [N_0] \{\epsilon_{ng}\} dx dy
 \end{aligned} \quad (5)$$

式中:

$$\begin{aligned}
 \{\epsilon_0\} &= \{\epsilon_{x0}, \epsilon_{y0}, \epsilon_{xy0}\}^T; \\
 \{k\} &= \{k_x, k_y, k_{xy}\}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T; \\
 \{d\varphi\} &= \left\{ \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right\}^T; \\
 \{N_T\} &= \{N_{xT} \ N_{yT} \ N_{xyT}\}^T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}] \{\alpha\} \Delta T(x, y, z) dz; \\
 \{M_T\} &= \{M_{xT} \ M_{yT} \ M_{xyT}\}^T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}] \{\alpha\} z \Delta T(x, y, z) dz; \\
 ([A], [B], [D], [E], [F], [GG], [D_s]) &= \\
 & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}] [1, z, z^2, z f(z), f(z), f^2(z), (\frac{df}{dz})^2] dz
 \end{aligned}$$

$[\bar{Q}]$ 为材料转换刚度系数矩阵;

$$\begin{aligned}
 \{\epsilon_{ng}\} &= \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T; \\
 \{\varphi\}^T &= \{\varphi_x, \varphi_y\}^T; \\
 \{M_T^*\} &= \{M_{xT}^* \ M_{yT}^* \ M_{xyT}^*\}^T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}] \{\alpha\} f(z) \Delta T(x, y, z) dz
 \end{aligned}$$

$\{\alpha\}$ 为材料转换热膨胀系数矩阵。

选用四节点矩阵单元进行分析, 设节点广义位移为

$$\{\delta_e\}^T = (u_{0i} \ v_{0i} \ w_i (\frac{\partial w}{\partial y})_i - (\frac{\partial w}{\partial x})_i (\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})_i \varphi_{xi} \varphi_{yi}) \quad (i = 1 \sim 4)$$

为保证 C' 阶连续性, 横向位移用 *Hermite* 插值函数, 其他位移采用双线性 *Lagrange* 插值函数, 则有

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \sum_{i=1}^4 N_i u_{0i} \\
 v_0 &= \sum_{i=1}^4 N_i v_{0i} \\
 w &= \sum_{i=1}^4 \{w(i) D_i^{(0,0)} + \frac{\partial w(i)}{\partial x} D_i^{(1,0)} + \frac{\partial w(i)}{\partial y} D_i^{(0,1)} + \frac{\partial^2 w(i)}{\partial x \partial y} D_i^{(1,1)}\} \\
 \varphi_x &= \sum_{i=1}^4 N_i \varphi_{xi} \\
 \varphi_y &= \sum_{i=1}^4 N_i \varphi_{yi} \quad (i = 1 \sim 4)
 \end{aligned}$$

式中: D, N , 见文[1], 这样(5)式变为

$$u_r = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{g\}^T [R_{rr}] \{g\} a_1 b_1 d\xi d\eta - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{g\}^T [L_{rr}] a_1 b_1 d\xi d\eta + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{g\}^T (\{G\}^T [N_0] \{G\}) \{g\} a_1 b_1 d\xi d\eta \quad (6)$$

式中: a_1, b_1 为单元半边长; ξ, η 为局部坐标^[1]。

$$\begin{aligned} [R_{rr}] &= [B_0]^T [A] [B_0] + [B_0]^T [B] [B_k] + [B_0] [F] [B_F] + [B_k]^T [B] [B_F] + \\ &[B_k]^T [D] [B_k] + [B_k]^T [E] [B_F] + [B_F]^T [F] [B_0] + [B_F]^T [E] [B_k] + \\ &[B_F]^T [GG] [B_F] + [B_T]^T [D_s] [B_r] \\ [L_{rr}] &= [B_0]^T \{N_T\} + [B_k]^T \{M_T\} + [B_F] \{M_T^*\} \\ [\epsilon_0] &= [B_0] \{q\}; [k] = [B_k] \{q\}; \{d\varphi\} = [B_F] \{q\} \\ \{\varphi\} &= [B_r] \{q\}; \{\epsilon_{ng}\} + [G] \{q\} \end{aligned}$$

$\{q\}$ 为 32×1 阶单元的总节点位移列阵;

$[B_0], [B_k], [B_F]$ 均为 3×32 阶与膜应变及弯曲应变有关的矩阵;

$[B_r]$ 为 2×32 阶与 $\{\epsilon_{ng}\}$ 有关的矩阵;

求式(6)二阶变分量并令其为零, 得特征方程

$$[K] \{\Delta\} + \lambda [k_g] \{\Delta\} = 0 \quad (7)$$

式中: $[K]$ 为总体刚度矩阵;

$\{\Delta\}$ 为总体位移列阵;

$[k_g]$ 为总体几何刚度矩阵。

对层合板温度插值取

$$T(x, y, z) = [T_u(x, y) - T_d(x, y)](z - h_1)/h + T_d(x, y) \quad (8)$$

其中 T_u 和 T_d 分别表示板上下表面的温度, h_1 为层合板下表面坐标。

2 算例

2.1 边界条件四边简支

$$\text{当 } x = 0, a \text{ 时, } u_0 = w = \frac{\partial v}{\partial y} = \varphi_y = 0$$

$$\text{当 } y = 0, b \text{ 时, } v_0 = w = \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x = 0$$

2.2 单元性能检验

例: 各向同性材料方板受均匀温度场时临界层屈曲温度见表 1。材料的 $E = 1.0 \text{ mPa}$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 2.0 \times 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$ 。板的 $h/a = 0.01$ 。边界条件为四边简支。

表 1 各种方法计算结果的比较

来 源	文[2]	文[2]	文[3]	本文解
层曲温度($^\circ\text{C}$)	63.27*	63.33	63.22	63.20

文[2]有限元解, 文[3]解析解, * 能量法解。

由上表可以看出本单元计算效果较好。

2.3 热屈曲特性讨论

取材料为 $E_1/E_0=40, E_2/E_0=1.0, G_{12}=G_{13}=G_{23}=0.5E_2, \nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.25, \alpha_0/\alpha_0=1.0$, 其中 E_0, α_0 为适当任何值, $\alpha/h=20, \alpha/b=1.0, T_{cr}=\alpha_0\Delta T_{cr}\times 10^3$ 。图2给出在四边简支条件下受均匀温度场反对称铺层层合板的临界屈曲温度随铺设角、层数变化的情况。图3给出四边简支条件下层合板临界屈曲温度随层合板的长宽比 a/b 值变化的情况, 图4给出在四边简支条件下, 四层反对角铺层层合板在温度场为 $T_u(x, y)=T_1, T_d(x, y)=T_2$ 时的临界屈曲温度的变化情况。

3 结论

本文用最小位能原理, 推导和建立了在高阶位移模式基础上的有限元单元公式, 提供的算例表明本单元和方法是有效的, 计算精度较高。本文通过算例讨论了影响层合板临界屈曲温度的一些因素, 这些因素包括铺层方向、铺层数量、板的长宽比、温度分布等。通过比较, 可以得出如下结论:

(1) 层合板的耦合效应降低了临界屈曲温度, 当层

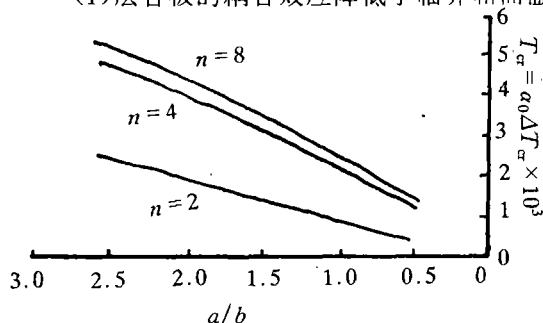


图3 反对称角铺层($\theta=\pm 45^\circ$)

在不同 a/b 值时的临界屈曲温度

数增加时, 这种耦合效应大为减小。

(2) 临界层屈曲温度随层合板的长宽比 a/b 的增大将大为提高。

(3) 反对称角铺设四边简支层合板, 对于当 $n\geq 4$ 时, 临界屈曲温度随铺设角和层数变化较大。

(4) 上下表面温差越大, 临界屈曲温度越低。

参考文献

- 1 李开泰等. 有限元方法及其应用. 西安: 西安交通大学出版社, 1984
- 2 Thangaratnam R K, Palaninathan, Ramachandran J. Thermal buckling of composite laminated plates. Inter. J. Computers & Structures, 1989, 32(3)
- 3 Sun L X, Hsu T, R. Thermal buckling of laminated composite plate with transverse shear deformation. Inter. J. Computers & Structures, 1990, 36(5)

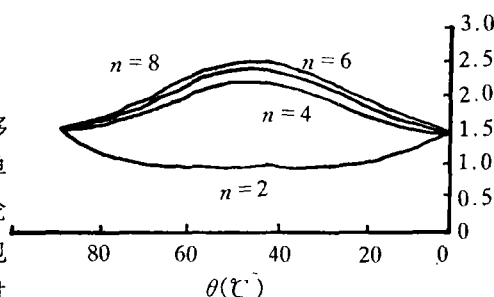


图2 反对称角铺层临界屈曲温度

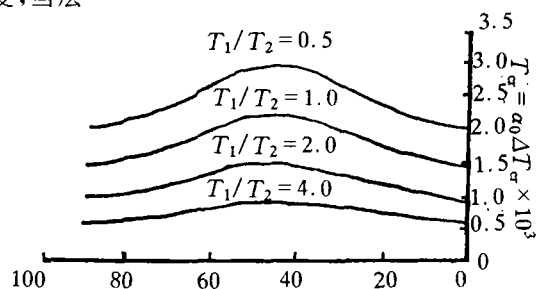


图4 反对称角铺层在上下表面受不同温度的临界屈曲温度