

有限差分法在斯托克斯问题上的应用

巫衡竹

(盐城工学院建筑材料工程系, 盐城, 224003)

摘要 将有限差分法应用于 Stokes's first problem 的求解。因为使用了显式格式, 解是有条件稳定的, 所以在推导出差分方程后, 分别通过两个算例, 借助于电子计算机进行计算, 求得满足稳定性条件下流场的速度分布曲线。

关键词 有限差分法 计算流体力学 斯托克斯问题

分类号 O368

流体力学广泛应用于动力、航空等部门。但由于流体力学中非线性问题特别多。大量实践中的复杂问题, 特别是在国防、航空和宇航上不得不借助于实验研究来解决。近年来, 由于电子计算机技术的迅速发展, 几乎对流体力学的各个分支都产生了猛烈的冲击。有限差分法是计算流体力学的主要组成部分, 它用离散化的方法把流体力学问题化成代数方程组, 从而求得流场中离散点上流动参数的近似数值解。由于数值方法最终使用的是算术运算和逻辑运算, 可以通过现代大型高速计算机来实现, 因此, 有限差分法为流体力学研究增添了一种新的手段。本文探讨有限差分法在 Stokes's first problem 上的应用。

一、推导差分方程

Stokes's first problem 即平面壁突然加速问题。平板和整个流体在时间 $t=0$ 以前处于静止状态, 然后平板在它自身平面内以恒速 u_0 从静止开始运动, 求流场的速度分布。

选择 x 轴与平面壁重合并指向 u_0 方向, 得到 Navier-Stokes 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

根据文献[1]可知, 整个流场压力为常数, 边界条件为

$$t < 0, u = 0 (\text{对所有的 } y \text{ 值}); \quad t \geq 0, u = u_0 (y = 0); \quad u = 0 (y \rightarrow \infty)$$

现在以向前差分形式写出 i 结点的速度对时间的导数:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + O(\Delta t)$$

这里的 $O(\Delta t)$ 反映的是含有因数 $\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots$ 的其余各项。再使用第 n 时间步长的速度值求空间导数:

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nu \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y^2)$$

• 收稿日期: 1996-04-23

这里 $O(\Delta y^2)$ 为 $(\Delta y)^2$ 阶截断误差。则方程(1)可以写成

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = v \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta y)^2} + O(\Delta t, \Delta y^2)$$

i 结点表示流体中离开壁面的一个点,与 y 坐标没有固定的关系。舍去上面方程中的 $O(\Delta t, \Delta y^2)$, 则得到

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2} [u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n] \quad (2)$$

使用显式格式,可以直接求出时间 $t + \Delta t$ (即 $n+1$) 时 i 结点的速度。

文献[2]提出的稳定性条件是要求稳定性准则(即扩散数) $D = \frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2}$ 满足

$$D \leq 0.5 \quad (3)$$

如果时间步长取得过大,解的过程是不稳定的,随着解的进行,振荡误差将会增长,称为动力不稳定。从方程看出,精度为 $O(\Delta t)$ 和 $O[(\Delta y)^2]$ 。

二、数值不稳定算例

假设平板及整个流体在 $t=0$ 以前处于静止状态,然后平板从静止开始沿着自身的平面以 10m/s 的速度运动。流体是油,运动粘度是 $0.000217\text{m}^2/\text{s}$ 。对于下列步长: $\Delta y = 0.001\text{m}$, $\Delta t = 0.010\text{s}$, 使用显式公式,计算作为 y 和 t 的函数的速度。

首先计算稳定性参数值,即扩散数 D :

$$D = \frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2} = \frac{0.000217 \times 0.010}{(0.001)^2} = 2.17$$

计算出 D 值大于 0.5 , 超过了稳定性标准。因此,我们可以预料,随着振荡误差的增长,解将是不稳定的。

壁面被定义为 $i=1$ 结点,对所有时间,壁面速度 $u_1^n = 10.0\text{m/s}$, 这是给定的边界条件。现在对第一和第二两个时间步长计算速度场,起始条件为:

$$t = 0, u_1^0 = 10.0\text{m/s}$$

流场中所有其它点的速度值均为零。

一个时间步长后的流动:

$$n = 1, t = 0.010\text{s}, u_1^1 = 10.0\text{m/s}$$

使用方程(2)计算 $i=2$ 结点的速度

$$\begin{aligned} u_2^1 &= u_2^0 + D(u_3^0 - 2u_2^0 + u_1^0) \\ &= 0 + 2.17 \times (0 - 0 + 10) = 21.7\text{m/s} \end{aligned}$$

流场中其它所有速度值 u 为零。

两个时间步长后的流动:

$$n = 2, t = 0.020\text{s}, u_1^2 = 10.0\text{m/s}$$

$$\begin{aligned} u_2^2 &= u_2^1 + D(u_3^1 - 2u_2^1 + u_1^1) \\ &= 21.7 + 2.17 \times (0 - 2 \times 21.7 + 10) \\ &= -50.778\text{m/s} \end{aligned}$$

$$u_3^2 = u_3^1 + D(u_4^1 - 2u_3^1 + u_2^1)$$

$$= 0 + 2.17 \times (0 - 0 + 21.7)$$

$$= 47.089 \text{ m/s}$$

流场中其它所有速度值 u 为零。

其它时间步长的速度值由计算机算出,见表 1。

表 1 $D=2.17$ 时 u 值

y(m)	t(s)			
	0.000	0.010	0.020	0.030
0(Wall)	10.000	10.000	10.000	10.000
0.001	0.000	+21.700	-50.778	+293.482
0.002	0.000	0.000	+47.089	-2670.
0.003	0.000	0.000	0.000	+102.183
0.004	0.000	0.000	0.000	0.000
0.010	0.000	0.000	0.000	0.000
0.020	0.000	0.000	0.000	0.000

从表 1 看出,解的过程是数值不稳定的。很明显,这种情况下的不稳定性完全是差分格式造成的,并与步长有关,而与物理现象无关。但是在更复杂的物理问题中,不稳定的结果是物理现象问题还是差分格式的数值稳定性问题则并不始终是明显的。

三、数值稳定算例

上例中,步长 Δy 不变,仍取 0.001 m ,时间步长 $\Delta t = 0.002 \text{ s}$ 。

首先计算扩散数 D :

$$D = \frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2} = \frac{0.000217 \times 0.002}{(0.001)^2} = 0.434$$

D 值在稳定性标准之内,可以预料解是稳定的。下面对第一、第二两个时间步长计算速度分布。

初始条件 $t = 0, n = 0, u_1^0 = 10.0 \text{ m/s}$ 其它速度值均为零。

一个时间步长后的流动:

$$n = 1, t = 0.002 \text{ s}, u_1^1 = 10.0 \text{ m/s}$$

$$u_2^1 = u_2^0 + D(u_3^0 - 2u_2^0 + u_1^0)$$

$$= 0 + 0.434 \times (0 - 0 + 10) = 4.34 \text{ m/s}$$

两个时间步长后的流动:

$$n = 2, t = 0.004 \text{ s}, u_1^2 = 10.0 \text{ m/s}$$

$$u_2^2 = u_2^1 + D(u_3^1 - 2u_2^1 + u_1^1)$$

$$= 4.34 + 0.434 \times (0 - 2 \times 4.34 + 10) = 4.913 \text{ m/s}$$

$$u_3^2 = u_3^1 + D(u_4^1 - 2u_3^1 + u_2^1)$$

$$= 0 + 0.434 \times (0 - 0 + 4.34) = 1.884 \text{ m/s}$$

其它时间步长的速度值由计算机算出,一并表示在表 2 中。按照表 2 所列数据可以绘制出符合稳定性条件的流场速度分布图。

表2 $D=0.434$ 时 u 值

$y(m)$	$t(s)$					
	0.000	0.002	0.004	0.008	0.240	0.480
0(wall)	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000
0.001	0.000	4.340	4.913	6.140	9.222	9.448
0.002	0.000	0.000	1.884	3.189	8.451	8.899
0.003	0.000	0.000	0.000	1.141	7.694	8.356
0.004	0.000	0.000	0.000	0.355	6.959	7.820
0.010	0.000	0.000	0.000	0.000	3.282	4.889
0.020	0.000	0.000	0.000	0.000	0.501	1.661
0.030	0.000	0.000	0.000	0.000	0.032	0.368

四、结论

在电子计算机上使用显式格式的有限差分法求解 Stokes's first Problem 简单、方便、快捷。虽然为了满足数值稳定性条件,时间步长 Δt 取得较小,加大了计算工作量,但对计算机来说并不成为问题,反而使计算精度提高了。如通过实验方法求得流场的速度分布,则耗时费力投资又大。因此有限差分方法为流体力学研究提供了一种新的手段。

参考文献

- 1 H. Schlichting, Boundary Layer Theory McGraw-Hill Book Company, New York, 1979
- 2 R. D. Richtmyer and K. W. Morton, Difference Methods for Initial Value Problems, Wiley-Interscience, New York, 1967
- 3 程心一. 计算流体力学. 科学出版社. 1984
- 4 刘光宗. 流体力学原理与计算基础. 西安交通大学出版社. 1988
- 5 刘希云, 赵润祥. 流体力学中的有限元与边界元方法. 上海交通大学出版社. 1993

(上接第21页)

乙苯的转化率随着硼改性催化剂中含硼量的增加而下降,故含硼量对本催化剂来讲,有一个适宜的范围,含硼量过小,达不到适当降低乙苯转化率的微调酸性的目的;含硼量过大,催化剂的活性下降, $pX/\Sigma X$ 值远离平衡组份值。

3 结论

- 3.1 对 Pt/HM' 催化剂的硼改性,使强酸区的较强部分的酸中心数适当降低,从而适合于二甲苯异构化的酸性要求。
- 3.2 硼改性催化剂对混合料的适应性好, $pX+oX/\Sigma X$ 的值明显提高。
- 3.3 硼改性催化剂适当降低了乙苯转化率,微调了催化剂的酸性,从而能提高产品的液收。

参考文献

- 1 王兴隆. C_8 芳烃异构化催化剂及其催化性能(硕士论文). 复旦大学化学系. 1995
- 2 李全芝, 王兴隆等. C_8 芳烃异构化催化剂及其制备方法. 中国专利, 94114070.9
- 3 张瑞明. 第8届国际沸石会议录. 荷兰. 1989
- 4 李全芝等. 催化学报. 1985, 6: 325
- 5 Sayed, M. B., J. Catal., 1986, 101, 43
- 6 Chang, C. D. and Silvestri, A. J., J. Catal., 1977, 47, 249