

叠加法与综合法在力学解题中的应用

施慰连

(盐城工学院基础科学部, 盐城, 224003)

叠加法即是由几个因素同时作用时所产生的总效果等于各个因素单独作用时所产生的效果的总和; 综合法即是同时考虑各因素的影响。帮助学生了解和掌握叠加法和综合法的应用, 对于提高学生分析问题和解决问题的能力是大有益处的, 以下讨论的是作者利用这两种方法在力学解题中应用的一个实例。

设三角形 ABC 为刚性板, 由①、②杆和 C 铰支承, ①杆抗拉刚度为 E_1A_1 , 线膨胀系数为 α_1 , ②杆抗拉刚度为 E_2A_2 , 线膨胀系数为 α_2 , 在 A 点受水平力 P 作用, 同时二杆温度均升高 Δt 度, 试求①、②的内力(图 a)。

该题是一次静不定, 又有外力和温度二个因素作用, 下面试用叠加法和综合法进行求解。

一、叠加法 分别考虑载荷 P 和温度的作用, 然后进行叠加。

1、考虑载荷 P 的作用。设①杆内力 N'_1 (拉力), 伸长 $\Delta l'_1$, ②杆内力为 N'_2 , 缩短 $\Delta l'_2$ (图 b)。(图中实线为原位置, 虚线为变形后的位置, 下同)。

则 平衡条件: $2N'_2 + N'_1 = P$

变形条件: $\Delta l'_2 = 2\Delta l'_1$

$$\Delta l'_1 = \frac{N'_1 l_1}{E_1 A_1} \quad \Delta l'_2 = \frac{N'_2 l_2}{E_2 A_2}$$

即可求出

$$N'_1 = \frac{P}{\frac{8E_2A_2}{E_1A_1} + 1}, N'_2 = \frac{\frac{8E_2A_2}{E_1A_1}P}{\frac{8E_2A_2}{E_1A_1} + 1}$$

2、考虑温度的作用。有二种情况:

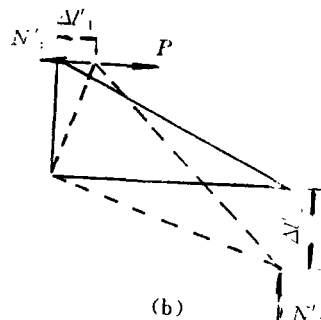
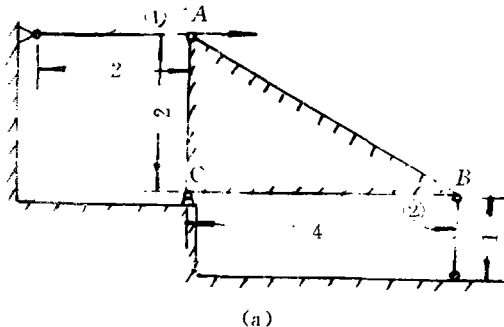
(1) ①杆伸长, ②杆缩短; ①杆内力为 N'_1 (压力), ②杆内力为 N'_2 (压力)(图 c)。

则: 平衡条件: $2N'_2 = N'_1$

变形条件: $(\Delta l'_{2t} - \Delta l'_{1t}) = 2(\Delta l'_{1t} - \Delta l'_{2t})$

$\Delta l'_{1t} = \alpha_1 l_1 \Delta t$, 因温度升高①杆的伸长量;

$\Delta l'_{2t} = \alpha_2 l_2 \Delta t$, 因温度升高②杆的伸长量。



$$\Delta l_1' = \frac{N_1' l_1}{E_1 A_1}, \Delta l_2' = \frac{N_2' l_2}{E_2 A_2}$$

即可求出

$$N_1' = \frac{2(4\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t}{\frac{1}{E_2 A_2} + \frac{8}{E_1 A_1}}$$

$$N_2' = \frac{(4\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t}{\frac{1}{E_2 A_2} + \frac{8}{E_1 A_1}}$$

则 ①杆的内力

$$N_1 = N_1' + N_1'' = \frac{P}{\frac{8E_2 A_2}{E_1 A_1} + 1} + \frac{2(4\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t}{\frac{1}{E_2 A_2} + \frac{8}{E_1 A_1}}$$

②杆的内力

$$N_2 = N_2' + N_2'' = \frac{\frac{8E_2 A_2 P}{E_1 A_1}}{\frac{8E_2 A_2}{E_1 A_1} + 1} + \frac{(4\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t}{\frac{1}{E_2 A_2} + \frac{8}{E_1 A_1}}$$

(2)若①杆缩短,②杆伸长;①杆内力为 N_1' (压力),

②杆的内力为 N_2' (压力)(图 d)。

则 平衡条件: $2N_2'' = N_1'$

变形条件: $\Delta l_2'' - \Delta l_2' = 2(\Delta l_1' - \Delta l_1)$

即可求出 N_1'' 和 N_2'' , 其结果与(1)情况相同。

叠加法,因只考虑一个因素,思路比较清晰,易理解,但解题较麻烦。

二、综合法 同时考虑载荷 P 和温度二个因素的作用,因三角形板为刚性板,它只能绕 C 点转动,或顺时针,或逆时针;同时二杆或伸长,或缩短;其内力或是拉力,或是压力;所以共有六种形式的解法。

1、设①杆伸长,拉力;②杆缩短,压力(图 e)。

则 平衡条件: $2N_2 + N_1 = P$

变形条件: $\Delta l_2 = 2\Delta l_1$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} + \alpha_1 l_1 \Delta t \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} - \alpha_2 l_2 \Delta t$$

2、设①杆缩短,拉力;②杆伸长,压力(图 f)。

则 平衡条件: $2N_2 + N_1 = P$

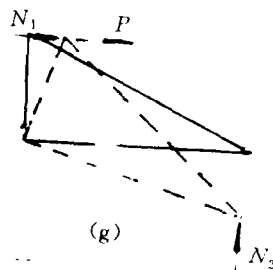
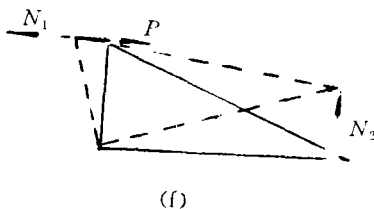
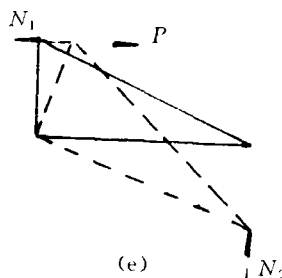
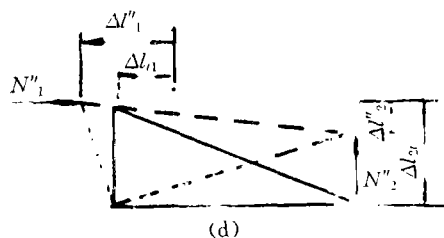
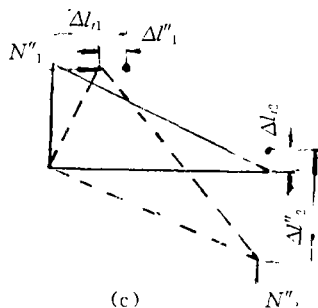
变形条件: $\Delta l_2 = 2\Delta l_1$

$$\Delta l_1 = -\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} - \alpha_1 l_1 \Delta t \quad \Delta l_2 = -\frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} + \alpha_2 l_2 \Delta t$$

3、设①杆伸长,压力;②杆缩短,压力(图 g)。

则 平衡条件: $N_1 + P = 2N_2$

变形条件: $\Delta l_2 = 2\Delta l_1$



$$\Delta l_1 = -\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} + \alpha_1 l_1 \Delta t \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} - \alpha_2 l_2 \Delta t$$

4、设①杆缩短,压力;②杆伸长,压力(图 h)。

则 平衡条件: $N_1 + P = 2N_2$

变形条件: $\Delta l_2 = 2\Delta l_1$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} - \alpha_1 l_1 \Delta t \quad \Delta l_2 = -\frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} + \alpha_2 l_2 \Delta t$$

5、设①杆伸长,拉力;②杆缩短,拉力(图 i)。

则 平衡条件: $2N_2 + P = N_1$

变形条件: $\Delta l_2 = 2\Delta l_1$

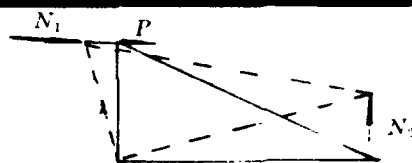
$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} + \alpha_1 l_1 \Delta t \quad \Delta l_2 = -\frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} - \alpha_2 l_2 \Delta t$$

6、设①杆缩短,压力;②杆伸长,拉力(图 j)。

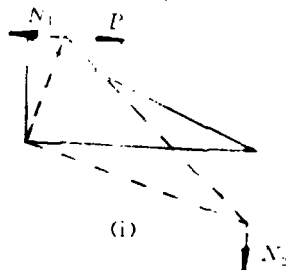
则 平衡条件: $2N_2 + P = N_1$

变形条件: $\Delta l_2 = 2\Delta l_1$

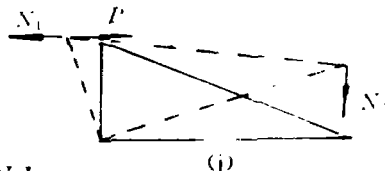
$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} - \alpha_1 l_1 \Delta t \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} + \alpha_2 l_2 \Delta t$$



(h)



(i)



(j)

从以上六种形式中,任取一种求解得到的 N_1, N_2 即是载荷 P 和温度共同作用下①杆、②杆内的内力。其结果与叠加法完全相同。比较二解题方法可看出,用综合法较叠加法简单。但用综合法时应注意两点:一是要满足静力平衡条件;二是杆内的内力与杆的变形要一一对应,即设杆的内力为拉力,杆的变形为伸长;杆的内力为压力,杆的变形为缩短。若设杆的内力为拉力,实际杆的变形为缩短,则应加负号。

(上接第 74 页)

代入化学反应等压方程(6)中,得

$$\ln \frac{3.5065 \times 10^{-23}}{1} = \frac{178.2 \times 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}}{8.314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} \left(\frac{1}{298} - \frac{1}{T} \right)$$

解得 $T = 1060.0 \text{ K}$, 与正常粒径的分解温度相比,下降了

$$\Delta T = 1105.7 \text{ K} - 1060.0 \text{ K} = 45.7 \text{ K}$$

上述计算过程中,作了诸多方面的近似,此外,小固体颗粒表面比液滴表面更不规则,曲率半径不可能到处相等,小固体颗粒的表面上不同曲率半径处应有不同的表面张力,所以用这一公式计算的值与文献值之间有一点差距。

以上应用开尔文公式对 CaCO_3 的分解过程进行了计算,结果与经验一致。就 CaCO_3 分解产生石灰的反应而言,减小固体的粒径,可以降低分解温度,节省能源,方便操作。应用开尔文公式研究金属氧化物如 Ag_2O 、 Fe_2O_3 、 CuO 等的分解过程能对解决金属的防腐等方面的问题有一定的指导作用。

参考文献

- 1 天津大学物理化学教研室编. 物理化学(下册). 第 3 版. 1983
- 2 南京大学物理化学教研室编. 物理化学(上册). 第 4 版. 1990