浅谈数学思想方法的教学策略*

沈菊芳
（盐城师范学校，盐城，224001）

数学教学的主旨在于发展学生的思维，培养数学能力，提高数学素质。而要达到眦目的，必须注重数学思想方法的教学。在我国，“数学教学要使学生掌握数学思想方法”的观点，目前已为广大数学教育工作者所接受。

在数学教学的内容中，概念、定理、公式等知识是数学的外在表现形式，而数学思想方法是数学的内蕴形式，数学科学是二者的有机结合。方法和思想没有严格的界限，习惯上，把其中带有具体性、操作性较强特征的称为方法，而带有抽象性、全局性、框架性特征的称为思想。数学思想方法一般并不是以明显形式呈现在数学知识中，因此，在数学思想方法的教学中，宜采取认识——提炼——运用——强化这样一个有梯度分层次的教学策略。

一、模拟数学活动，使学生形成对思想方法的认识

前苏联教育家斯托利亚尔说：“数学教学是数学活动的教学。”只有突出数学理论的形成过程，引导学生参与数学的“发现”，学生才能获得活的知识。所以在数学教学中，我们不仅要让学生掌握方法的一招一式，更重要的是向学生展现数学思想和方法产生和发展的过程，这样才能使学生对数学思想方法形成印象深刻的认识。

例如，关于转化思想的认识，转化是化繁为简，化难为易，化未知为已知，化陌生为熟悉……，教学中可结合具体内容进行如下数学活动模拟：

证明三角形边与角之间的不等关系，可以引导学生“截长补短”添置辅助线，将“不等”问题转化为“相等”问题，通过已知的关于边角相等的知识，解决未知的边角之间的不等关系；三角形内角和的证明，可让学生动手用纸做一个三角形，将其两个角撕下，三角拼在一起，发现三内角之和是个平角，从而使学生发现证明的思想方法，就是将三个角移到一起，添置平行线，化难为易，得到证明；平面解析几何中“椭圆”的教学，利用圆的铁丝圈，用两手指按对称方向向中心压，使圆变成一个椭圆。这样椭圆的方程转化为由圆的方程推得：$x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2=1$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

二、反思解题过程，强调思想方法的揭示和提炼

数学思想方法教学的第二个阶段是问题解决后对解题过程进行反思，从中挖掘、抽象、概括、提炼出数学思想方法的精华，理解数学思想方法的实质。

例如，在一些有关的线段和问题的证明中，都用到了“截长补短”的技巧，教者要引导学生

* 收稿日期：1996－12－15

反思技巧的实质是将“不等”转化为“相等”，将“未知”转化为“已知”，从而为问题的解决铺平了道路；又如，在一些通过添加平行线实现角或边的平行移动来达到求解目的的问题教学中，应帮助学生从“平行移动”的技巧概括出蕴含的转化思想；再如，二元一次方程组的教学，在第一阶段应让学生掌握两种消元法，第二阶段应让学生理解两种消元法的实质是同样的，都是化二元为一元，化陌生为熟悉。

三、重视运用训练，突出数学思想方法的指导作用

在学生对某些思想方法已经形成本质认识的基础上，应趁热打铁，通过将其运用于解答问题的手段，展现数学思想方法的应用过程，突出数学思想方法在解题中的指导作用。

例 1，若 $x,y>0$，且 $x+y=1$，证明：$(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})\geqslant\frac{25}{4}$。

分析：该题如果直接用不等式 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ 去证明，则只能得到较弱的结果。原因在于没有用到条件 $x+y=1$，若注意到题设条件与结论的对称形式，设 $x=\sin^2\alpha, y=\cos^2\alpha$，则 $(\sin^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha})(\cos^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha})=\frac{\sin^4\alpha\cos^4\alpha+\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{\sin^4 2\alpha-8\sin^2 2\alpha+32}{4\sin^2 2\alpha}=\frac{(4-\sin^2 2\alpha)^2+16}{4\sin^2 2\alpha}\geqslant\frac{(4-1)^2+16}{4\times 1}$ 以上的证明过程中，既使用了换元法，又使用了配方法和放缩法，这些方法的综合运用，有益于培养学生灵活运用数学方法的能力。

例 2，求椭圆 $L: x^2+2y^2=1$ 中斜率为 2 的平行弦中点 $M(x,y)$ 的轨迹。

解：作变换 $\begin{cases}x=u\\ y=\frac{v}{\sqrt{2}}\end{cases}$，于是 $L': u^2+v^2=1, k'=\sqrt{2}k=2\sqrt{2}$ 易求得 L' 中斜率为 $2\sqrt{2}$ 的平行弦中点的轨迹方程为 $v=-\frac{u}{2\sqrt{2}}$（在 L' 的内部），从而所求轨迹方程为：$x+4y=0$（在 L 的内部）。

例 3：椭圆 $L:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $M(\sqrt{3},0)$ 且与直线 $l: x+y=1$ 交于 A、B 两点，若 $|AB|=2\sqrt{2}$，求 L 的方程。

解：L 过点 $M(\sqrt{3},0)$ 可得 $a=\sqrt{3}$，作变换 $\begin{cases}x=\sqrt{3}u\\ y=bv\end{cases}$ 将问题转化为在圆上解决，利用变换前后椭圆与圆中线段长度变化的关系，可得 L 的方程为 $x^2+\sqrt{2}y^2=3$。

这些训练，有助于学生掌握数学思想方法，形成良好的认知结构。

四、反复再现，逐步强化，促进数学思想方法模块化

数学方法固然具有普遍适用性，但数学知识则是逐步深化的，这就导致了在知识发展的各个阶段所反映出的数学方法的不同的层次性。对同一数学方法，应该注意在不同的知识阶段的再现，加强学生对数学方法的深刻认识和灵活运用。一般地，低年级或知识新授阶段介绍较低层次的方法，高年级或知识深化阶段介绍较高层次的方法，反复再现，逐步强化。如换元法、配方法都曾

（下转第 13 页）

行化，在约化过程中我们将第 2 步中 a 部分的运算作适当的合并，这样做是为了加大第 2 步 b 部分矩阵乘的运算量，从而有利于 b 部分的并行运算。而对 QZ 迭代过程我们仍然执行串行算法，这是因为：第一，分析迭代过程，其中的每步运算前后相互依赖，数据相关性很大，第二，各步计算，主要花销是在矩阵乘法的计算上，而这里的矩阵乘是由一个矩阵与一个 Givens 阵的左乘或右乘，运算量不大，考虑到调用并行的开销相对较大，因此在迭代步使用串行运算，因而整个过程实际使用的是一种串并行混合算法。

表 1 中的加速比反映了本算法的并行化程度。对 640 阶这种规模的问题使用 2 个 CPU 的效率是 62%，使用 4 个 CPU 的效率是 56%，对非对称广义特征值问题达到这样的效率还是可以的，但使用 8 个 CPU 时的效率是 38.41%，这样的结果令人难以满意，这一方面说明 QZ 算法内蕴的串行性较强，另一方面也表明探讨其它更有效的求解广义特征值问题的并行算法的必要性。而关于其它的一些高效并行算法(如拟 Jacobi 方法等)将另撰文发表。

作者衷心感谢周树荃教授的指导并感谢北京应用物理与计算数学研究所提供的赞助。

参考文献

1 曾岚，周树荃. 并行子空间迭代法. 中国工业与应用数学学会第三次大会论文集. 清华大学出版社. 1994，704～708

2 周树荃，曾岚. 并行分块子空间迭代法. 中国计算数学学会第五届年会论文集. 1995

3 周树荃，曾岚. 求解广义特征值问题的并行保域行列式查找法. 南京航空航天大学学报. 1995，27(2)，147～155

4 ZengLan，Zhou Shu Quan，parallel region－presrving multi－section method for solving generalized eigenproblem，International Conference On Parallel Algorithms，1995，Wu han China

5 邓绍忠，周树荃. 广义特征值问题的并行 EBE 向量迭代法. 计算结构力学及其应用. 1994，11(4)，401～407

6 周树荃，邓绍忠. 广义特征值问题的 EBE－Lanczos 并行算法. 工程力学. 1995，12(1)，116～122

7 邓绍忠，周树荃. 大型结构特征值问题的并行 EBE 子空间迭代法. 南京航空航天大学学报. 1994，26(5)，575～581

8 C. B. Moler and G. W. Stewart(1973)，An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems，SIAM J. Num. Anal. 10，241～256

9 周树荃，孙克明. 数值代数. 航空专业教材编审组. 1985

10 G. H. Golub and C. Van. Loan Matvix computations，John Hopkins university press，Baltimore，1984(中译本：廉庆荣等译. 矩阵计算. 大连理工大学出版社. 1988

11 孙绍麟编著. Power Fortran 语言和 Power Fortran 加速器用户指南. 北京应用物理与计算数学研究所. 1994