第10卷 第2期
1997年6月
盐城工学院学报
Journal of Yancheng Institute of Technology
Vol. 10 No. 2
Jun. 1997

距离生成子*

韦 俊
(盐城工学院基础科学部,盐城,224003)

摘 要 讨论了非负函数与距离函数的复合仍为该空间上的距离的条件及有关代数性质,并进一步讨论了这种复合函数与原距离函数所确定的收敛关系。

关键词 生成子 条件 代数性质 收敛性
分类号 O174

引 言

设 X 是一个非空集合,$\rho:X\times X\rightarrow R_+$ 是 X 上的一个距离,其中 R_+ 表示全体非负实数作成的集合,如所周知,一般地说,可以从 ρ 出发定义出 X 上各种距离,如分别由下列两式确定的函数 $\rho_1,\rho_2:X\times X\rightarrow R_+$ 都是 X 上的距离:$\forall\ x,y\in X$,

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

$$\rho_2(x,y)=min(\rho(x,y),1)$$

显然,我们可以把 ρ_1,ρ_2 分别理解为是由 ρ 与适当的函数 $g_1,g_2:R_+\rightarrow R_+$ 复合而成,事实上,我们有

$$\rho_i=g_io\rho,\qquad i=1,2$$

其中 g_1,g_2 由下列两式确定

$$g_1(a)=\frac{a}{1+a}\qquad\forall\ a\in R_+$$

$$g_2(a)=min(a,1)\qquad\forall\ a\in R_+$$

另一方面,任意给定函数 $g:R_+\rightarrow R_+$,非空集合 X,以及 X 上的距离 ρ,显而易见,$go\rho$ 是 $X\times X$ 到 R_+ 的函数,但不一定是 X 上的距离,那么,人们自然会问,到底 g 满足哪些条件才能保证(对于任意非空集合 X 上的任意距离 ρ)$go\rho$ 是距离呢?当 $go\rho$ 是距离时,$go\rho$ 和 ρ 分别确定的 X 上的两个拓扑有何联系呢?本文试就上述问题作初步的讨论。

1 距离生成子及其判定

为了叙述方便,我们引入如下

定 义 任意给定函数 $g:R_+\rightarrow R_+$,我们称 g 是一个距离生成子(简称生成子),如果对于任意非空集合 X 上的任何距离 ρ,函数 $\rho'=go\rho$ 总是 X 上的距离,这时,我们称距离 ρ' 是由距离 ρ 经生成子 g 生成的。

---

* 收稿日期:1996—09—15

定理1.1　任意给定函数 $g:R_+\to R_+$，则 g 是生成子当且仅当 g 满足下列条件：

(1)$g(a)=0\quad\Leftrightarrow a=0,a\in R_+$，

(2)$a+b\geqslant c,b+c\geqslant a,c+a\geqslant b\Rightarrow g(a)+g(b)\geqslant g(c),g(b)+g(c)\geqslant g(a),g(c)+g(a)\geqslant g(b),a,b,c\in R_+$

证　明　首先，假定 g 是生成子，我们来证明 g 满足条件(1)和(2)。

事实上，我们有 $g(0)=0$，这是因为：既然 g 是生成子，对于任意非空集合 X 上的任意距离 ρ，$\rho'=go\rho$ 是距离，从而

$$g(0)=g(\rho(x,x))=\rho'(x,x)=0,x\in X$$

这表明 $a=0\Rightarrow g(a)=0$，为了证明 $g(a)=0\Rightarrow a=0$，任取 $a\in R_+,a\neq0$，考察两点集 $X=\{x_1,x_2\}$ 上的距离 $\rho_a:\forall\ x,y\in X$，

$$\rho_a(x,y)=\begin{cases}0,x=y\\a,\text{否则}\end{cases}$$

由于 g 是生成子，$\rho'=go\rho_a$ 是距离，从而

$$g(a)=g(\rho_a(x_1,x_2))=\rho'(x_1,x_2)\neq0$$

上述表明 g 满足条件(1)。

为了证明 g 满足条件(2)，任取 $a,b,c\in R_+$，并且假定 $a+b\geqslant c,b+c\geqslant a,c+a\geqslant b$ 成立，这时，若 a,b,c 三者有一为零，如 $a=0$ 必有 $b=0$，结论显然成立。当 a,b,c 全不为零时，考察三点集 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ 到 R_+ 的函数 ρ：

$$\begin{aligned}&\rho(x,x)=0,\forall\ x\in X\\&\rho(x_1,x_2)=\rho(x_2,x_1)=a\\&\rho(x_3,x_2)=\rho(x_2,x_3)=b\\&\rho(x_3,x_1)=\rho(x_1,x_3)=c\end{aligned}$$

由于 $a+b\geqslant c,b+c\geqslant a,c+a\geqslant b$，因此 ρ 是 X 上的一个距离，从而 $\rho'=go\rho$ 也是 X 上的一个距离，这样一来，我们便有

$$\begin{aligned}g(a)+g(b)&=g(\rho(x_1,x_2))+g(\rho(x_2,x_3))\\&=\rho'(x_1,x_2)+\rho'(x_2,x_3)\\&\geqslant\rho'(x_1,x_3)\\&=g(\rho(x_1,x_3))\\&=g(c)\end{aligned}$$

同样还有

$$g(b)+g(c)\geqslant g(a),g(c)+g(a)\geqslant g(b)$$

上述表明 g 满足条件(2)。

其次，假定 g 满足条件(1)和(2)，我们来证明 g 是生成子，为此，考察任意非空集合 X 上的任意距离 ρ，令 $\rho'=go\rho$，下面证明 ρ' 是 X 上的距离，显然 ρ' 是 $X\times X$ 到 R_+ 的函数，进一步地，注意到 g 满足条件(1)和(2)我们有：$\forall\ x,y,z\in X$。

(a)$\rho'(x,y)=0\quad\Leftrightarrow g(\rho(x,y))=0\quad\Leftrightarrow\rho(x,y)=0\quad\Leftrightarrow x=y$

(b)$\rho'(x,y)=g(\rho(x,y))=g(\rho(y,x))=\rho'(y,x)$

(c)$\rho'(x,y)+\rho'(y,z)=g(\rho(x,y))+g(\rho(y,z))\geqslant g(\rho(x,z))=\rho'(x,z)$

这是因为 ρ 是距离，从而 $\rho(x,y)+\rho(y,z)\geqslant\rho(x,z)$，$\rho(x,y)+\rho(x,z)\geqslant\rho(y,z)$，$\rho(y,z)+\rho(x,z)\geqslant\rho(x,y)$，这就证明，当 g 满足条件(1)和(2)时，g 必为生成子。

综上所述，定理获证。

作为定理1.1的一个简单而有用的推论，我们有

定理1.2 设 g 是一个生成子，$a,b\in R_+$，则 $a\geqslant b\Rightarrow g(a)\geqslant\frac{1}{2}g(b)$。

证 明 由于 $a\geqslant b$，因此

$$a+b\geqslant c,b+c\geqslant a,c+a\geqslant b$$

其中 $c\triangleq a$，这样，根据定理1.1中的条件(2)，必有 $g(c)+g(a)\geqslant g(b)$，即 $g(a)+g(a)\geqslant g(b)$，从而，$g(a)\geqslant\frac{1}{2}g(b)$

定理1.3 设 g 是一个生成子，则

$$\underline{\lim}_{a\to0^+} g(a)=0\Rightarrow\lim_{a\to0^+} g(a)=0$$

即 g 在 $a=0$ 处(右)连续。

证 明 假设 $\underline{\lim}_{a\to0^+} g(a)=0$，现在用反证法来证明 $\overline{\lim}_{a\to0^+} g(a)=0$

事实上，假如 $\overline{\lim}_{a\to0} g(a)=M>0$，任取 $\varepsilon>0$，使 $M-\varepsilon>0$，则对于任意小的 $\delta>0$，总存在 $a_0\in(0,\delta)$，使得 $g(a_0)\geqslant M-\varepsilon$，利用定理1.2可进一步推知

$$g(a)\geqslant\frac{1}{2}(M-\varepsilon)>0,\forall\ a\geqslant a_0$$

这样一来，由于 δ 的任意性可以知道

$$g(a)\geqslant\frac{1}{2}(M-\varepsilon)>0,\forall\ a\in(0,+\infty)$$

这与 $\underline{\lim}_{a\to0^+} g(a)=0$ 矛盾，因此必有 $\overline{\lim}_{a\to0^+} g(a)=0$，从而 $\lim_{a\to0^+} g(a)=0$

定理1.4 设给定函数 $g:R_+\to R_+$，若 g 满足下列条件(1)－(3)，则 g 是一个生成子。

(1) $g(a)=0\Leftrightarrow a=0.a\in R_+$

(2) g 在整个 R_+ 上单调不减，

(3) g 是上凸的，即 $g(\lambda a_1+(1-\lambda)a_2)\geqslant\lambda g(a_1)+(1-\lambda)g(a_2)$，$\forall\ \lambda\in[0,1]$ 及 $a_1,a_2\in R_+$。

证 明 假设 g 满足条件(1)－(3)，根据定理1.1，为了证明 g 是一个生成子，今只需再验证 $a+b\geqslant c,\ a,b,c,\in R_+\Rightarrow g(a)+g(b)\geqslant g(c)$。

为此，任取 $a,b,c\in R_+$，使 $a+b\geqslant c$，考察 $g(a)+g(b)$ 与 $g(c)$，当 $a=0$ 时，有 $b\geqslant c$，由条件(2)，$g(b)\geqslant g(c)$，从而必有 $g(a)+g(b)\geqslant g(c)$，当 $a>0$ 时，必有 $a+b>0$，利用条件(3)，(1)，(2)可得

$$g(a)+g(b)=g(\frac{a}{a+b}(a+b)+\frac{b}{a+b}\cdot0)+g(\frac{a}{a+b}0+\frac{b}{a+b}(a+b))$$

$$\geqslant(\frac{a}{a+b}g(a+b)+\frac{b}{a+b}g(0))+(\frac{a}{a+b}g(0)+\frac{b}{a+b}g(a+b))=g(a+b)\geqslant g(c)$$

上述表明，蕴涵关系式 $a+b\geqslant c,a,b,c\in R_+\Rightarrow g(a)+g(b)\geqslant g(c)$ 成立。

2 距离生成子的代数性质

本节的任务是给出由已知距离生成子通过适当的代数运算得出新的距离生成子的方法。

定理 2.1 设 g 是一个生成子，则对于任意的正实数 λ，λg 也是一个生成子，其中 $\lambda g: R_+ \to R_+$ 由下式确定：

$$(\lambda g)(a) = \lambda g(a), \forall\ a \in R_+$$

证 明 直接验证。

定理 2.2 设 g_1, g_2 都是生成子，则 g_1+g_2 也是生成子，其中 g_1+g_2 由下式确定：

$$(g_1 + g_2)(a) = g_1(a) + g_2(a) \qquad \forall\ a \in R_+$$

证 明 显然 g_1+g_2 是 R_+ 到 R_+ 的函数，设 ρ 任一非空集合 X 上的任一距离，考察 $\rho'=(g_1+g_2)o\rho$，我们有：$\forall\ x,y,z\in X$。

(i) $\rho'(x,y)=0 \Leftrightarrow g_1(\rho(x,y))+g_2(\rho(x,y))=0 \Leftrightarrow g_1(\rho(x,y))=0$ 且 $g_2(\rho(x,y))=0 \Leftrightarrow \rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

(ii) $\rho'(y,x)=g_1(\rho(x,y))+g_2(\rho(x,y))=g_1(\rho(x,y))+g_2(\rho(x,y))=\rho'(x,y)$

(iii) $\rho'(x,y)+\rho'(y,z)=g_1(\rho(x,y))+g_2(\rho(x,y))+g_1(\rho(y,z))+g_2(\rho(y,z))=g_1(\rho(x,y))+g_1(\rho(y,z))+g_2(\rho(x,y))+g_2(\rho(y,z))\geqslant g_1(\rho(x,z))+g_2(\rho(x,z))=(g_1+g_2)(\rho(x,z))=\rho'(x,z)$

所以 g_1+g_2 是生成子。

利用定理 2.1 和 2.2 立即可以得到

定理 2.3 设 g_i 是生成子，$\lambda_i \in R_+$ 不全为零，$i=1,2\cdots,n$，则 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i$ 是生成子。

定理 2.4 设 g_1, g_2 都是生成子，则 g_1og_2 也是生成子。

证 明 显然 g_1og_2 是 R_+ 到 R_+ 的函数，今设 ρ 是任一非空集合 X 上的任一距离，由 g_2 是生成子知 $g_2o\rho$ 是 X 上的距离，再由 g_1 是生成子知 $(g_1og_2)o\rho=g_1o(g_2o\rho)$ 也是 X 上的距离，所以 g_1og_2 是生成子。

3 进一步讨论

如所周知，在度量空间理论中，人们主要的兴趣不是在于距离函数本身，而是在于它们所确定的拓扑或收敛(参看[1])，因此，在从某个距离 ρ 出发利用生成子 g 构作新的距离 ρ' 时，人们自然要关心 ρ' 到 ρ 所确定的收敛之间的关系，本节将讨论这个问题。

定理 3.1 设 g 是一个生成子，ρ、ρ' 都是任意给定的某个非空集合 X 上的距离，并且 $\rho'=go\rho$，若 g 在 $a=0$ 处(右)连续，则 ρ' 与 ρ 等价(参看[1])。

证 明 假设 g 在 $a=0$ 处(右)连续，考察 X 中任一点列 $(x_n)_{n\in N}$ 和任一点 x_0，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0$，那么，由 g 在 $a=0$ 处(右)连续，可以得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho'(x_n,x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}g(\rho(x_n,x_0)))=g(\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0))=0$，这表明，由点列 $(x_n)_{n\in N}$ 按 ρ 收敛于 x_0 可以得到点列 $(x_n)_{n\in N}$ 按 ρ' 也收敛于 x_0。

反之，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)$ 不存在，或存在而不等于零，那么，存在 $\varepsilon_0>0$ 及自然数列 $n_1<n_2<\cdots<n_i<n_{i+1}\cdots$，使 $\rho(x_{n_i},x_0)\geqslant\varepsilon_0$，其次，由于 g 是生成子，根据定理 1.1 必有 $g(\varepsilon_0)>0$，再根据定理 1.2，对于一切实数 $a\geqslant M$ 都有 $g(a)>\frac{1}{2}g(\varepsilon_0)>0$，由此可见，或者 $\lim\limits_{n\to\infty}g(\rho(x_n,x_0))$ 不存在；或者 $\lim\limits_{n\to\infty}g(\rho(x_n,x_0))$ 存在且其值大于零。上述表明：当 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)$ 不存在或存在其值大于

零时，$\lim\limits_{n\to\infty}\rho'(x_n,x_0)$也不存在或虽存在而其值大于零。即由点列$(x_n)_{n\in N}$按$\rho'$收敛于$x_0$可以推得点列$(x_n)_{n\in N}$按$\rho$收敛于$x_0$。

综上所述，ρ'与ρ等价。

定理 3.2 设g是一个生成子，ρ和ρ'都是任意给定的某个非空集合X上的距离，并且ρ'是ρ经g生成的，即$\rho'=go\rho$，若

$$\lim_{a\to 0^+} g(a) \triangleq M > 0 \tag{1}$$

则距离空间(X,ρ')中每个单点子集都是开子集。

证　明　假设(1)式成立，任取$\varepsilon>0$。使$M-\varepsilon>0$，于是，由(1)式可推知，存在$\delta>0$使得

$$g(a)\geqslant M-\varepsilon \qquad \forall\, a\in(0,\delta)$$

这样一来，再利用定理1.2可以进一步断言

$$g(a)\geqslant \frac{1}{2}(M-\varepsilon) \qquad \forall\, a\in(0,+\infty)$$

由此可见，对X中任意两个不同的点x_1,x_2，都有

$$\rho'(x_1,x_2)=g(\rho(x_1,x_2))\geqslant \frac{1}{2}(M-\varepsilon)>0$$

所以空间(X,ρ)中每个单点子集都是开子集。

参考文献

1　关肇直，张恭庆，冯德兴. 线性泛函分析入门. 上海：上海科技出版社. 1979

2　江泽涵. 拓扑学引论. 上海：上海科技出版社. 1978

(上接第20页)

若其窑体高度h偏高，则层流区h_1更大，上述现象更为恶化。显然，就卸料平稳性而言，大规格窑$\frac{h}{D}$尽可能取较小值。

(2)机立窑窑体结构　下部扩大的窑体结构有利于边部熟料的松动与卸出，缓解由于层流区造成的中部卸出快，边部卸出慢的矛盾，对卸料平稳性是有益的。

(3)卸料装置的型式　塔式、双曲式、半球式卸料装置以颚口为主要卸料渠道，故其混和区h_3，过渡区h_2相对较高，减小层流区h，显然其卸料平稳性较好。盘塔式卸料装置以盘塔上的孔及边部环沟为主要卸料渠道，其边部环沟与盘部的卸料能力之和不低于上述三种型式的颚口卸料能力，尽管混和区h_3稍小，h_1稍大，但仍具有较好的卸料平稳性。传统的盘式、往复式、辊压式则其h_3、h_2均较小，h_1较大，故其卸料平稳性差，产质量难以提高。

6、解决措施

(1)在水泥煅烧工艺许可的前提下，尽可能降低窑体高度。

(2)下部适度放大的窑体结构，有利于卸料平稳。

(3)卸料装置在保证$\varepsilon(\varepsilon')$、$Q$前提下，尽可能保证有边部颚口卸料及适当的篦子高度。

参考文献

1　W · Ansen. 立窑. 中国工业出版社

2　沈威等编. 水泥工艺学. 中国建筑工业出版社