

关于多元微积分若干问题的新的推导

沈菊芳

(盐城师范学校, 盐城, 224001)

摘 要 尝试用微分几何方法对多元微积分中的一些基本问题给出新的推导, 从而使高等数学中的一些内容在微分几何这一新的层次上可得到更深刻的理解。

关键词 流形 微分形式 Jacobi 微分同胚 闭形式 恰当形式

分类号 O172

1 空间曲面的切平面方程

在 R^3 设有一曲面 S , 它由参数方程所给出:

$$x = X(u, v), y = Y(u, v), z = Z(u, v)$$

其中 u, v 是参数, $x, y, z \in C^\infty$, 这里并假定

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2$$

即假定该矩阵中至少有一个二阶子式不为 0, 该曲面 S 可看作是 R^3 中的一个二维微分流形。

由上述曲面的参数方程, 关于曲面上任一点 $p(x, y, z)$, 可得曲面 S 的向量方程

$$r(u, v) = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k$$

在点 $p_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, 曲线

$$(I) \begin{cases} r(u, v) = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k \\ v = v_0 \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} r(u, v) = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k \\ u = u_0 \end{cases}$$

构成了流形 S 在点 p_0 的局部坐标系。

沿坐标曲线 (I) 的切向量是

$$e_1 = \left. \frac{dr(u, v_0)}{du} \right|_{u=u_0} = \left\{ \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_{p_0}, \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_{p_0}, \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_{p_0} \right\}$$

沿坐标曲线 (II) 的切向量是

$$e_2 = \left. \frac{dr(u_0, v)}{dv} \right|_{v=v_0} = \left\{ \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_{p_0}, \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_{p_0}, \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_{p_0} \right\}$$

这里 e_1 和 e_2 它们确定出流形 S 在点 p_0 处切空间的一组基。

点 p_0 的 Darboux 标架将是 $\{p_0, e_1, e_2, e_3\}$, 其中 e_3 为曲面 S 在点 p_0 的法矢量

$$e_3 = e_1 \times e_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}_{p_0} = \left\{ \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \right)' \right|_{p_0} \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right)' \right|_{p_0} \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)' \right|_{p_0} \right\}$$

这里 $\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \right)'$ 表 Jacobi 矩阵, t 表转置, 从而我们根据点法式, 可得流形(曲面) S 在点 p_0 的切空间(切平面)方程为

$$\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \right)' \right|_{p_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right)' \right|_{p_0} (y - y_0) + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)' \right|_{p_0} (z - z_0) = 0$$

这和数学分析中的结果将完全一致。

例 1, 求曲面 $x=u+v, y=u^2+v^2, z=u^3+v^3$ 在 $u_0=2, v_0=1$ 处的切平面方程。

解:

$$\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \right)' \right|_{p_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}_{p_0} = \begin{vmatrix} 2u & 3u^2 \\ 2v & 3v^2 \end{vmatrix}_{\substack{u_0=2 \\ v_0=1}} = -12$$

$$\text{同理} \quad \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right)' \right|_{p_0} = 9 \quad \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)' \right|_{p_0} = 2$$

又 $u_0=2, v_0=1$ 时可求得 $x_0=3, z_0=9$, 故所求切平面方程为

$$-12(x-3) + 9(y-5) - 2(z-9) = 0$$

2 关于多元复合函数的二阶求导公式

设函数 $W=f(u,v,w), u=u(x,y,z), v=v(x,y,z), w=w(x,y,z) \in C^2$, 定义流形间映射

$$f: R^3 \rightarrow R$$

$$(u,v,w) \rightarrow f(u,v,w)$$

和

$$g: R^3 \rightarrow R^3$$

$$(x,y,z) \rightarrow (u,v,w)$$

则 $W=fog$, 而映射 f 和 g 分别可诱导出切空间之间的切映射

$$df: T_{(u,v,w)} \rightarrow T_{f(u,v,w)}$$

$$dg: T_{(u,v,w)} \rightarrow T_{(u,v,w)}$$

这里 df 和 dg 即分别是指映射 f 和 g 的 Jacobi。

$$df = (f_u \quad f_v \quad f_w)$$

$$dg = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$$

映射 W, f, g 的二阶微分矩阵现分别是

$$d^2W = \begin{pmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{pmatrix}, d^2f = \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} & f_{uw} \\ f_{vu} & f_{vv} & f_{vw} \\ f_{wu} & f_{wv} & f_{ww} \end{pmatrix}$$

$$(d^2g)_i = \begin{pmatrix} u_{ix} & u_{iy} & u_{iz} \\ v_{ix} & v_{iy} & v_{iz} \\ w_{ix} & w_{iy} & w_{iz} \end{pmatrix} \quad t = x, y, z$$

另一方面,关于复合映射 $W=fog$ 的二阶微分我们可由下式确定

$$d^2W = d(dfodg) = (dg)'od^2fodg + dfod^2g \quad (*)$$

(*)式进一步可写成矩阵的形式(从略),比较(*)式矩阵形式两边,从而我们可得

$$W_{xx} = (f_{uu} \cdot u_x + f_{uv} \cdot v_x + f_{uw} \cdot w_x) \cdot u_x + (f_{vu} \cdot u_x + f_{vv} \cdot v_x + f_{vw} \cdot w_x) \cdot v_x \\ + (f_{wu} \cdot u_x + f_{wv} \cdot v_x + f_{ww} \cdot w_x) \cdot w_x + f_u \cdot u_{xx} + f_v \cdot v_{xx} + f_w \cdot w_{xx} \\ W_{xy} = (f_{uu} \cdot u_y + f_{uv} \cdot v_y + f_{uw} \cdot w_y) \cdot u_x + (f_{vu} \cdot u_y + f_{vv} \cdot v_y + f_{vw} \cdot w_y) \cdot v_x \\ + (f_{wu} \cdot u_y + f_{wv} \cdot v_y + f_{ww} \cdot w_y) \cdot w_x + f_u \cdot u_{xy} + f_v \cdot v_{xy} + f_w \cdot w_{xy}$$

这就给出多元复合函数 W 的二阶偏导公式。

例2,设 $W=f(xyz, x+y+z, xe^y)$, $f \in C^2$, 求 W_{xx} 。

解: $u=xyz, v=x+y+z, w=xe^y$, 代入上述 W_{xx} 中,

$$W_{xx} = (f_1 \cdot yz + f_{12} \cdot 1 + f_{13}e^y) \cdot yz + (f_{21}yz + f_{22} \cdot 2 + f_{23} \cdot e^y) + (f_{31}yz + f_{32} + f_{33} \cdot e^y) \\ = y^2z^2f_{11} + f_{22} + e^{2y}f_{33} + 2yzf_{12} + 2e^yf_{23} + 2yze^yf_{13}$$

同理可求 W_{xy} 。

3 多元函数的积分

这一节我们将看到,所谓多元函数积分学中的诸多公式实际都能统一在如下的定理中。

定理 设 M 和 N 是定向微分流形, $\Phi: M \rightarrow N$ 是一个微分同胚, $\omega = \sum_{i_1, \dots, i_r} f_{i_1, \dots, i_r}(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_r} \in \mathcal{X}(N)$ 为 N 中的 r 微分形式, 则

$$\int_{\Phi(M)} \omega = \epsilon \cdot \int_M \Phi^* \omega \quad (**)$$

其中 $\Phi^*(\omega) = \sum_{i_1, \dots, i_r} f_{i_1, \dots, i_r}(\Phi(x)) \frac{\partial(y^{i_1} \dots y^{i_r})}{\partial(x^{j_1} \dots x^{j_r})} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r} \in \mathcal{X}(M)$ 是 N 中的 r 微分形式 ω 到 M 的拉回。

又 φ 保向时 $\epsilon=1$, φ 反保向时 $\epsilon=-1$ 。

(限于篇幅,证略)。

下面我们举二例来说明上述定理的应用。

例3, 设给出 R^3 中的一开子集 V , 一条 V 中的 C^∞ 类路径 $\varphi: [a, \beta] \subset R^1 \rightarrow V, t \mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, 即 $\varphi(t)$ 表示 V 中的一条参数曲线, 又给出 V 中的 1-形式

$$\omega = p(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \in \mathcal{X}(V)$$

则根据(**)式,我们得

$$\int_{\varphi[a, \beta]} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{[a, \beta]} \omega = \epsilon \int_{[a, \beta]} \varphi^* \omega$$

$$= \varepsilon \int_{[a, \theta]} [P(\varphi(t)) \frac{dx}{dt} + Q(\varphi(t)) \frac{dy}{dt} + R(\varphi(t)) \frac{dz}{dt}] dt$$

$$= \pm \int_{[a, \theta]} [P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)] dt$$

其中 φ 保向时积分取“+”号, φ 反保向时积分取“-”号。此式就是第 II 型曲线积分的计算公式。

例 4, 设 V 是 R^3 中中心在圆点, 半径为 R 的球域, 保向微分同胚 $\varphi \in C^\infty(R^3, R^3)$ 现由下式所给出

$$\varphi(\gamma, \varphi, \theta) = (x = \gamma \sin \varphi \cos \theta, y = \gamma \sin \varphi \sin \theta, z = \gamma \cos \varphi)$$

考虑 φ 限制在 $[0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ 上, 则 $\varphi(\gamma, \varphi, \theta) \in V$, 又设

$$\omega = f(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz \in \Lambda^3(V)$$

为 V 中的 3-形式, 则根据(*)式我们可得

$$\begin{aligned} \int_V f(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz &= \int_{\varphi([0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi])} \omega \\ &= \int_{[0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]} \varphi^* \omega \\ &= \int_{[0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]} f(\varphi(\gamma, \varphi, \theta)) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\gamma, \varphi, \theta)} d\gamma \wedge d\varphi \wedge d\theta \\ &= \int_{[0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]} f(\gamma \sin \varphi \cos \theta, \gamma \sin \varphi \sin \theta, \gamma \cos \varphi) \cdot \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \gamma \cos \varphi \cos \theta & -\gamma \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \gamma \cos \varphi \sin \theta & \gamma \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\gamma \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} d\gamma d\varphi d\theta \\ &= \int_{[0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]} f(\gamma \sin \varphi \cos \theta, \gamma \sin \varphi \sin \theta, \gamma \cos \varphi) \gamma^2 \sin \varphi d\gamma d\varphi d\theta \end{aligned}$$

此式就是球坐标下三重积分的计算公式。

由上述定理, 几乎所有的积分公式我们也都类似可得。

4 关于曲线积分与路径无关

这一节我们可证明数学分析中曲线积分与路径无关的一个等价命题。

命题 设 D 是 R^3 中曲面单连通的区域, $\omega = Pdx + Qdy + Rdz \in \Lambda^1(D)$ 是 D 中的微分 1-形式, 其中 $P, Q, R \in C^\infty(D)$, 则下列条件等价

(1) 在 (D) 内成立 $\text{rot}\{P, Q, R\} = 0$

亦即

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

(2) 存在势函数 $\varphi(x, y, z) \in C^\infty$, 使

$$d\varphi = \omega = Pdx + Qdy + Rdz, \text{ 在 } D \text{ 内成立}$$

(3) 对 D 内任一光滑闭曲线 C , 有 $\int_C \omega = 0$ 。

证 (1) $\Rightarrow$ (2), 设(1)的条件满足, 则微分 1-形式 ω 的外微分

$$\begin{aligned}
 d\omega &= d(Pdx + Qdy + Rdz) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz \\
 &= \left(\frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy\right) \wedge dz \\
 &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy = 0
 \end{aligned}$$

所以 ω 在 D 内是闭 1-形式。根据 Poincare 引理的逆, 在可缩区域 D 内闭 1-形式必是恰当 1-形式, 亦即存在 0 次微分式 $\varphi(x, y, z) \in C^\infty(D)$, 使 $\omega = d\varphi$ 。

(2) $\Rightarrow$ (1), 设存在势函数 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz = d\varphi$

则

$$\begin{aligned}
 0 &= dd\varphi = d\omega = d(Pdx + Qdy + Rdz) \\
 &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy
 \end{aligned}$$

由于基矢 $\{dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy\}$ 线性无关, 故

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

(1) $\Rightarrow$ (3), 注意到 D 是可缩流形, D 中 1-闭链 C (闭曲线 C) 必为边缘链 $C = \partial D^2$, 其中 D^2 是一个二维链, 而 ω 现是闭 1-形式 ($d\omega = 0$), 于是由 Stokes 公式得

$$\int_C \omega = \int_{\partial D^2} \omega = \int_{D^2} d\omega = \int_{D^2} 0 = 0$$

(3) $\Rightarrow$ (2), 若对 D 中的任何闭曲线 C

$$0 = \int_C \omega = \int_{\partial D^2} \omega = \int_{D^2} d\omega, \text{ 则 } \Rightarrow d\omega = 0$$

即 ω 是闭 1-形式, 所以 (1) 中的条件满足。

讨论: 考虑 1-形式

$$\omega = \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$$

定义在 $R^2 - \{0\}$ 上, 经计算可得 $d\omega = 0$, 即 ω 在 $R^2 - \{0\}$ 上是闭 1-形式, 但 ω 在 $R^2 - \{0\}$ 上现不能整体表为恰当形式, 否则对 $R^2 - \{0\}$ 中任何可微回路 C 应有 $\int_C \omega = 0$, 然而如果 C 是逆时针单位圆 S , 则

$$\begin{aligned}
 \int_C \omega &= \int_C (x+y)dx - (x-y)dy \\
 &= \int_0^{2\pi} [(\cos\theta + \sin\theta)(-\sin\theta) - (\cos\theta - \sin\theta)\cos\theta]d\theta = -2\pi \neq 0
 \end{aligned}$$

所以 ω 在 $R^2 - \{0\}$ 上不能整体表为恰当形式。其原因是 $R^2 - \{0\}$ 为不可缩流形, $R^2 - \{0\}$ 的基本群 $\pi_1(R^2 - \{0\}) \neq 0$, $R^2 - \{0\}$ 的一维 De Rham 上调群 $H^1(R^2 - \{0\}) \neq 0$ 。因此要使 D 上的 1-形式 ω 能整体成为恰当形式, 加在位形空间 D 上的拓扑条件必然是

$$\pi_1(D) = 0 \text{ 和 } H^1(D) = 0$$

参考文献

- 1 C von westenholz Differential forms in Mathematical physics N · H · P · C (1981)
- 2 M. 斯皮瓦克著. 齐民友, 路见可译. 流形上的微积分. 科学出版社