第10卷 第4期
1997年12月

盐城工学院学报
Journal of Yancheng Institute of Technology

Vol. 10 No. 4
Dec. 1997

用同态基本定理证明矩阵秩的一些性质*

韦 俊
(盐城工学院基础部,盐城,224003)

摘 要 在高等代数中,许多关于矩阵的秩的性质的证明是比较复杂的。因此提出用近世代数中的同态基本定理来证明这些性质,这种方法简洁明了,便于接受。

关键词 同态 定理 矩阵 秩

分类号 O151

关于矩阵秩的一些性质的证明,有许多方法,本文利用近世代数中的同态基本定理来证明这些性质。这种方法开拓了我们的证明思路,使证明很简洁,且有规律可循,有较大的优越性。

为了方便起见,我们约定:L^n 表示 n 维列向量空间;$R(A)$表示 A 的列向量生成的线性空间;x、t、u 分别表示 n、s、r 维列向量,并且将同态映射的定义及同态基本定理叙述如下:

定义:设 f 是线性空间 v 到 v' 的一个映射,如果 f 保持加法以及数乘运算,则称 f 是同态映射。若 f 又是满射,则称 f 是 v 到 v' 的满同态,记作:$v\overset{f}{\sim}v'$。若 f 是双射,则称 f 是 v 到 v' 的同构映射,记作:$v\cong v'$。

同态基本定理:设 v 和 v' 是数域 F 上的线性空间,$v\overset{f}{\sim}v'$,则 $v/kerf\cong v'$。

证明:由参考文献[3]知 $\ker f$ 是 v 的子空间,令 $\varphi(d+\ker f)=f(d)$,$d\in v$,易得 φ 是 $v/\ker f$ 到 v' 的同构映射,所以 $v/\ker f\cong v'$。

引理:设 W 是线性空间 v 的子空间,则

$$\dim(V/W)=\dim V-\dim W$$[1]

定理 1:设 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times s$ 矩阵,那么

$$\mathrm{rank}(AB)\leqslant min(\mathrm{rank}A,\mathrm{rank}B)$$

证明:令 $f:Bt\to ABt$,则 f 是 $R(B)$到 $R(AB)$的同态映射,由于 $R(AB)$的每一个元素也具有 ABt 的形式,故 f 是 $R(B)$到 $R(AB)$的满同态。于是由同态基本定理及引理得

$$R(B)/\ker f\cong R(AB)$$
$$\dim R(AB)=\dim R(B)-\dim\ker f$$

从而有

$$\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(B)-\dim\ker f$$

所以

$$\mathrm{rank}(AB)\leqslant \mathrm{rank}B$$

同理可证

$$\mathrm{rank}(AB)\leqslant \mathrm{rank}A$$

---

* 收稿日期:1997-05-20

于是有

$$\mathrm{rank}(AB) \leqslant min(\mathrm{rank}A, \mathrm{rank}B)$$

定理2：设 A、B 都是 $m\times n$ 矩阵，则

$$\mathrm{rank}(A+B) \leqslant \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$$

证明　令 $f:BX\to(A+B)X+R(A)$，易见 f 是 $R(B)$ 到 $R(A+B)/R(A)$ 的一个满同态，于是

$$R(B)/\ker f \cong R(A+B)/R(A)$$

$$\dim R(B) - \dim\ker f = \dim R(A+B) - \dim R(A)$$

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B - \dim\ker f = \mathrm{rank}(A+B)$$

所以有

$$\mathrm{rank}(A+B) \leqslant \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$$

定理3　设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，$AB=0$，则

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B \leqslant n$$

证明　令 $f:X\to AX$，易见 f 是 L^n 到 $R(A)$ 的满同态。于是

$$L^n/\ker f \cong R(A)$$

$$\dim R(A) = n - \dim\ker f$$

$$\mathrm{rank}A + \dim\ker f = n$$

由于 $\forall\ Bt\in R(B)$，有 $f(Bt)=ABt=0$，即有 $Bt\in\ker f$，则 $R(B)\subseteq\ker f$，$\mathrm{rank}B\leqslant\dim\ker f$，故 $\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B\leqslant n$。

定理4(Sylvester 定律)　设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，则

$$\mathrm{rank}(AB) \geqslant \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B - n$$

证明　令 $f:X\to AX+R(AB)$，显然 f 是 L^n 到 $R(A)/R(AB)$ 的满同态。于是

$$L^n/\ker f \cong R(A)/R(AB)$$

$$n - \dim kek f = \dim R(A) - \dim R(AB)$$

$$\mathrm{ran}r(AB) = \dim\ker f + \mathrm{rank}A - n$$

由于 $\forall\ Bt\in R(B)$，有

$$f(Bt) = ABt + R(AB) = R(AB)$$

即 $Bt\in\ker f$，则，$R(B)\subset\ker f$

$$\mathrm{rank}B \leqslant \dim\ker f$$

所以

$$\mathrm{rank}(AB) \geqslant \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B - n$$

从上述证明中可知定理3是定理4的特殊情况。

定理5(Frobenius 不等式)　设 A、B、C 分别是 $m\times n$、$n\times s$、$s\times r$ 矩阵，则

$$\mathrm{rank}(ABC) \geqslant \mathrm{rank}(AB) + \mathrm{rank}(BC) - \mathrm{rank}(B)$$

证明　令 $f:Bt\to ABt+R(ABC)$，易见 f 是 $R(B)$ 到 $R(AB)/R(ABC)$ 的满同态。于是

$$R(B)/\ker f \cong R(AB)/R(ABC)$$

$$\dim R(B) - \dim\ker f = \dim R(AB) - \dim R(ABC)$$

$\forall\ Bc\mu$　(下转第24页)

位移 c＝0。将已知参数代入上述有关公式，得：第一道支撑轴力 N_1＝334.8KN；第二道支撑轴力 N_2＝903.9KN；第三道支撑轴力 N_3＝1279.14KN。由于位移计算中所有参数是根据同类工程实测结果选取。因此，工程实测资料积累越多，计算参数选择更合理，计算结果更可靠，因而需进一步积累工程实测资料。

四、几点说明

1、深基坑开挖所产生的土体位移容易引起相邻道路和旧建筑物发生裂缝，且过大的变形会导致结构失稳破坏，为此，基坑支护设计必须计算和预估变形量，基坑开挖应严格控制变形量，这是支护成败的决定因素。围护多为临时构筑物，容许应力采用较大数值，一般控制桩顶水平位移≤2cm，桩身变形≤0.1%～0.7%开挖深度，能满足对周围环境的要求。

2、监测是管理的重要辅助手段，其数据是技术人员的眼睛，其重要性已逐步被人们所认识。支护体系的变形是与土的外界因素相互作用的反映，变形的大小是度量整个支护系统是否正常工作的最直观标志，又与相邻建筑物、地下管线、交通设施的沉降与变形紧密相关。所有突发性的稳定破坏之前，支护体系也总有变形与裂缝的前兆。因此，桩顶水平位移和桩身变形一般是必测的，对于多层复杂的基坑开挖宜采用信息施工技术，与施工过程密切结合，进行动态设计，效果会更好。监测积累的数据，对于修正地区土压力模型，确定合理计算参数，以及改革和发展设计理论都是必不可少的。

3、基坑开挖后，支护体的位移及其上土压力的大小都会随时间而变化，如何正确地分析位移与土压力的相互关系，通过位移控制设计，仍然需从理论与实践的结合上深入研究。

参考文献

1 黄运飞编著. 深基坑工程实用技术. 北京兵器工业出版社，1996

2 蔡伟铭，胡中雄编. 土力学与基础工程. 中国建筑工业出版社，1991

3 董熙龄主编. 高层建筑地下结构及基坑支护. 北京宇航出版社，1994

4 陈仲颐，叶书麟. 基础工程学. 1991

5 Peck R B. Deep Excavations and Tunneling in soft Ground. Proc. ,7th. Internal Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Sate of the Art Volume Mexico City

（上接第 13 页）

因为 $f(Bc\mu)=ABC\mu+R(ABC)=R(ABC)$

所以 $Bc\mu\in\ker f$，则

$$R(BC)\subseteq\ker f$$

故有

$$\mathrm{rank}(ABC)\geqslant\mathrm{rank}(AB)+\mathrm{rank}(BC)-\mathrm{rank}B$$

在定理 5 中，若令 B 为 n 阶单位阵，C 为 $n\times s$ 矩阵，此时就得到定理 4 结论。

参考文献

1 S. Lpschutz. 线性代数的理论和习题. 上海科学技术出版社，1983

2 吴品三. 近世代数. 高等教育出版社，1985

3 张禾瑞，郝炳新. 高等代数. 高等教育出版社，1988