关于局部线性相关与WRONSKIAN行列式的讨论*

朱亚萍

(盐城工学院基础部，盐城，224003)

摘 要 通过研究，得到了关于局部线性相关与Wronskian行列式恒等于零之间关系的若干定理。

关键词 局部线性相关 Wronskian行列式 恒等于

分类号 O151

设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数，下式

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

称为Wronskian(朗斯基)行列式。众所周知，当 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 在区间 I 上解析且线性相关时，Wronskian行列式恒等于零。反之，Wronskian行列式恒等于零不能说明 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 在 I 上线性相关，函数还必须满足其它条件。[1]

本文将讨论线性相关、局部线性相关与Wronskia行列式恒等于零之间的关系。下面所涉及到的函数均是定义在非空开区间上实变量复值函数。

1 三个引理[2]

为证明局部线性相关的有关定理，首先介绍三个基本的引理。为避免重复，假设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 在区间 I 上任一点处至少具有 $n-1$ 阶导数。

引理1 若 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 在区间 I 上线性相关，则其Wronskia行列式恒等于零。

为便利叙述，给出下列记号：

$$W = W(f_1, f_2, \cdots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$W(f_1) = f_1$$

* 收稿日期：1998－10－19

当 $n\geqslant 2$ 时，$W_k=W(f_1,\cdots,f_{k-1},f_{k+1},\cdots,f_n)\qquad k=1,2,\cdots,n$

$$W_{in}=W(f_1,\cdots,f_{i-1},f_{i+1},\cdots,f_{n-1})\qquad i=1,2,\cdots,n-1$$

显然，当 $n=2$ 时，$W=W(f_1,f_2)=f_1f_2'-f_1'f_2$

从而有公式 $(f_2/f_1)'=(f_1f_2'-f_1'f_2)/f_1^2=W/f_1^2$

由此推广，即可得引理 2。

引理 2　设 $f_1,f_2,\cdots,f_n(n\geqslant 2)$ 为区间 I 上的 n 个函数，若对 $\forall\ x\in I,W_n=W(f_1,f_2,\cdots,f_{n-1})\neq 0$，则有

$$(W_i/W_n)'=(W_{in}\cdot W)/W_n^2\qquad i=1,2,\cdots,n-1$$

引理 3　若在区间 I 上，$W=W(f_1,f_2,\cdots,f_n)\equiv 0(n\geqq 2)$，而对 $\forall\ x\in I,W_n=W(f_1,f_2,\cdots,f_{n-1})\neq 0$，则 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性相关，且存在 $n-1$ 个复数 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}$，使 $f_n=\sum\limits_{i=1}^{n-1}C_if_i$。

2　局部线性相关与 Wronskian 行列式

定义 1　设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 定义在非空开区间 I 上，当且仅当对任意非空开区间 $J\subset I$，存在 n 个不全为零的复数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 和一个非空开间 $K\subset J$，使得在 K 上有

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)=0$$

时，称 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 在区间 I 上局部线性相关。否则称 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 在区间 I 上局部线性无关。

显然，若 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 在区间 I 上线性相关，必定局部线性相关。但 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 尽管存在各阶导数，由局部线性相关不能推出线性相关。

例　设 C 是区间 $I=[0,1]$ 上康托尔三分点集[3]，$I_1,I_2,\cdots,I_n\cdots$ 依次指区间 $(I-C)$ 上从左至右的小开区间，记 $I_k=(a_k,b_k)$。

定义 $x\in I_k$ 时，

$$h_k(x)=\exp\{-(x-a_k)^{-2}-(x-b_k)^{-2}\}$$
$$f(x)=(-1)^kh_k(x)$$
$$g(x)=h_k(x)\qquad k=1,2,\cdots$$

$x\in C$ 时，$f(x)=g(x)=0$

则易证得：f 和 g 在 $(0,1)$ 上存在各阶导数；它们局部线性相关，但不是线性相关的。

定义 2　设 $g(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 是定义在区间 I 上的函数，若当且仅当对任意非空开子集 $J\subset I$，存在非空开子集 $K\subset J$，使 g 是 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的线性组合，则称 g 在开区间 I 上是 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的局部线性组合。

局部线性相关与 Wronskian 行列式恒等于零的关系有下列定理。

定理 1　设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是非空开区间 I 上的函数，均存在 $n-1$ 阶导数，则 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 在 I 上局线性相关的充要条件是：存在稠密的开子集 $G\subset I$，使得在 G 上，$W=W(f_1,f_2,\cdots,f_n)\equiv 0$。

证明　必要性　设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 在 I 上局部线性相关，G 表示使 $W\equiv 0$ 的点集的内部，x 是 I 内任一点，U 是 x 的任一邻域，则存在一个非空开区间 $K\subset U$，使在 K 上 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性相关，但由引理 1，在 K 上，$W\equiv 0$，故 U 包括 G 的无穷多点，从而 G 是 I 上稠密子集。

充分性　设 G 是 I 的稠密开子集，且在 G 上 $W\equiv 0$。下面通过归纳法证明 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 在

I 上局部线性相关。$n=1$ 时结论不重要。$n=2$ 时结论显然成立。设对 $n=k$ 时结论成立。设 $f_1, f_2, \cdots, f_k, f_{k+1}$ 是 $k+1$ 个定义在区间 I 上且有 k 阶导数的复值函数，在稠密开子集 $G \subset I$ 上，$W(f_1, f_2, \cdots, f_{k+1}) \equiv 0$，设 J 是 I 上任一非空的开区间，既然 G 是 I 上开的稠密子集，$J \cap G$ 包含一个非空开区间 K。这里有两种情形：

情形 1　在 K 上 $W^* = W(f_1, f_2, \cdots, f_k) \equiv 0$，由假设 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 在 K 上局部线性相关，故 $f_1, f_2, \cdots, f_k, f_{k+1}$ 在一个非空开区间 $L \subset K \subset J \subset I$ 上线性相关。

情形 2　在 K 上 $W^* = W(f_1, f_2, \cdots, f_k)$ 不恒等于零，既然 W^* 在 I 上连续，则存在一个非空开区间 $L \subset K$，使在 K 上 $W^* \neq 0$，由引理 3，$f_1, f_2, \cdots, f_{k+1}$ 在 $L \subset K \subset J \subset I$ 上线性相关。

上述两种情形中，J 均是任意的，从而 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 在 I 上局部线性相关，定理 1 得证。

定理 2　设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 在开区间 I 上具有 $n-1$ 阶导数，且在 I 上局部线性相关，则 $W(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 在任一拟连续点等于零。

证明　由定理 1，在一个稠密开子集 $G \subset I$ 上，$W=0$。显然，W 在 G 上任一点连续。设 $x_0 \in (I-G)$，且 $W(x_0) \neq 0$，令 $\varepsilon = \frac{1}{2}|W(x_0)|$，若 W 在 x_0 点拟连续，则必存在一个非空开区间 $J \subset \{x \mid |x-x_0| < \varepsilon\}$，使得在 J 上

$$|W(x) - W(x_0)| < \varepsilon$$

因
$$|W(X_0)| - |W(x)| \leq |W(x) - W(x_0)| < \varepsilon$$

则
$$|W(x)| > |W(x_0)| - \varepsilon = \frac{1}{2}|W(x_0)| > 0$$

这与 J 是稠密集矛盾，从而 x_0 是拟连续点时，$W(x_0)=0$。定理 2 得证。

定理 3　设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 在区间 I 上具有各阶导数，则 $W=W(f_1, f_2, \cdots, f_n) \equiv 0$ 与它们在 I 上局部性相关等价。

证明　设 $W \equiv 0$，因 I 是自身的一个非空稠密子集，由定理 1 知 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是局部线性相关的。另一方面，设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 在 I 上局部线性相关，因 W 在 I 上连续，由定理 2 得 $W \equiv 0$。定理 3 得证。

定理 4　设 $\varphi(x)$ 是非空开区间 I 上实值可微函数，对任一非空开区间 J，集合 $I \cap \varphi^{-1}(J)$ 要么是空集，要么具有正测度。[2]

推论. 设 $g(x)$ 是非空开区间 I 上实变量的复值函数，若在 I 上任一点处 $g(x)$ 可微且 $g'(x)$ 在 I 上几乎处处等于零，则在 I 上 $g'(x) \equiv 0$。

证明　设 $g(x) = u(x) + iv(x)$，其中 u, v 均是实值函数。由 $g'(x)=0\ a.e$，得 $u'=0\ a.e$ 和 $v'=0\ a.e$，因此我们只需考虑实值函数。

设 $g(x)$ 是一个满足推论中条件的实值函数，设 I 上一点 x_0 处，$g'(x_0) \neq 0$，则存在一非空开区间 J，使 $g'(x_0) \in J$，那么 $I \cap \varphi^{-1}(J)$ 非空，且包含 x_0，由定理 4，它必有正测度，这同 $g'(x)=0\ a.e$ 矛盾，从而在 I 上任一点处 $g'(x) \equiv 0$。

定理 5　设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 在开区间 I 上任一点处具有 $n-1$ 阶导数，且局部线性相关，W 在 I 上几乎处处拟连续，则在 I 上 $W \equiv 0$。

证明　设 Z_i 指区间 I 上使 $W_i = 0$ 的子区间，$i=1,2,\cdots,n$。则区间 $Z = \bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ 上，$W \equiv 0$，且 $I-Z$ 是 I 上开子区间（因 $W_1, W_2, \cdots, W_n$ 在 I 上连续）。

设 x_0 是 $I-Z$ 上任一点，I_0 是 $I-Z$ 上包含 x_0 的开区间，则在 x_0 处，$W_1,W_2,\cdots,W_n$ 不全为零，不失一般性地，设 $W_n(x_0)\neq 0$，由 $W_n(x)$ 的连续性，存在一非空开区间 $J\subset I_0$ 且 $x_0\in J$，使在 J 上任一点处，$W_n\neq 0$，但由引理 2 有

$$(W_i/W_n)' = (W_{in}\cdot W)/W_n^2, i = 1,2,\cdots,n-1 \qquad \forall x\in J \tag{1}$$

因 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 在 I 上局部线性相关，W 在 I 上几乎处处拟连续。由定理 2 知，W 在 I 上几乎处处等于零，因此在 J 上几乎处处等于零。由式(1)和定理 4 推论，在 J 上

$$W_{in}\cdot W = 0, i = 1,2,\cdots,n-1 \tag{2}$$

现设 $x^*\in J$，且在 x^* 处，$W\neq 0$，由(2)得

$$W_{in}(x^*) = 0, i = 1,2,\cdots,n-1$$

因此

$$W_n(x^*) = 0$$

这与 J 的构成矛盾。从而在 J 上 $W\equiv 0$，特别地 $W(x_0)=0$，但因 x_0 是 $I-Z$ 上任一点，在 Z 上 $W\equiv 0$，因此，在 I 上 $W=0$。定理 5 得证。

参 考 文 献

1　王高雄等．常微分方程式．北京：高等教育出版社，1993

2　程其襄等．实变函数与泛函分析基础．北京：高等教育出版社，1996

The Discuss on the Local Linear Relation and Wornskian Colum

Zhu Yaping

(Basic Department Institute of Technology Yancheng, Yancheng, 224003, PRC)

Abstract This paper obtains a few theorem on the relation between local line and wronskian column which equals to zero.

Keywords local linear relation; wronskian column; equals

(上接第 38 页)

The Discussion To The Design of Indoor Ambience

Guo Chengbo[1)]　*Wang Pei*[2)]

(1)Department of Constrction Engineering of Yancheng Institute of Technology, Yancheng, 224003, PRC

2)Advertisement and Pecoration Company of Yancheng, Yancheng, 224001, PRC)

Abstract It is very important issne for indoor environment design to create and hadle with the ambience. This paper discusses the concept of indoor environment and study a few problems about the design of indoor ambience.

Keywords Ambience; the design of indoor ambiene; environmental arts