

# 动态非线性模型参数多层递阶估计法

李 斌

(盐城工学院学生处, 盐城 224003)

**摘 要** 针对目前通用的动态系统状态预报方法的不足, 提出关于动态非线性模型参数估计的多层递阶估计法, 并对预报误差的原因进行分析, 使预报精度得到提高。

**关键词** 非线性模型 参数 预报

**分类号** O51

关于动态系统的状态预报, 无论对系统分析, 还是对系统控制都是十分重要的。目前通用的预报方法往往随着预报期间(步长)的增长, 预报误差很快增大, 使这些方法的应用受到限制, 发生这种现象的重要原因之一是系统的时变性与进行预报的数学模型参数非时变性之间的差异, 即在预报过程, 把一个时变参数系统看成了非时变参数系统, 用非时变参数模型预报时变参数系统的状态, 其预报误差必然随着预报期间(步长)的增长而加大。为了弥补这种不足, 本文提出关于动态非线性模型参数估计的多层递阶估计方法。

## 1 设所考虑的动态非线性模型的形式为<sup>[1,2]</sup>:

$$y_{(k)} = f(x_k, \theta, k) + \epsilon_{(k)} \quad (1)$$

其中  $x_k = (x_{(0)}, x_{(1)}, \dots, x_{(r)})$ ,  $\theta = (\theta_{(0)}, \theta_{(1)}, \dots, \theta_{(r)})^T$ ,  $k$  是离散的流动时间,  $\epsilon_{(k)}$  是随机的误差变量。根据文献[2]的递推算法可得到关于参数的跟踪公式如下:

$$\hat{\theta}_{(k)} = \hat{\theta}_{(k-1)} + \frac{\delta}{\|\nabla_{\hat{\theta}_{(k-1)}} f[k, \hat{\theta}_{(k-1)}]\|^2} \nabla_{\hat{\theta}_{(k-1)}} f[k, \hat{\theta}_{(k-1)}] \{y_{(k)} - f[x_k, \hat{\theta}_{(k-1)}, k]\} \quad (2)$$

$\delta$  为适当选取的正数, 这里

$$\nabla_{\hat{\theta}_{(k-1)}} f[k, \hat{\theta}_{(k-1)}] = \frac{\partial}{\partial \theta} f[x_k, \theta, k]_{\theta = \hat{\theta}_{(k-1)}}$$

$\hat{\theta}_{(k)}$  为非时变参数系统  $y_{(k)} = f(x_k, \theta, k)$  下最小二乘估计值。

当动态非线性模型转为线性形式时,

$$y_{(k)} = x_{(k)} \theta + \epsilon_{(k)} \quad (3)$$

则参数  $\theta$  估计的递推公式变为

$$\hat{\theta}_{(k)} = \hat{\theta}_{(k-1)} + \frac{\delta}{\|x_{(k)}\|^2} x_{(k)} \{y_{(k)} - x_{(k)} \cdot \hat{\theta}_{(k-1)}\} \quad (4)$$

设应用上述参数跟踪公式得到的参数跟踪估值序列是:

$$\hat{\theta}_{(1)} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{(1,1)} \\ \hat{\theta}_{(1,2)} \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{(1,N)} \end{bmatrix}, \hat{\theta}_{(2)} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{(2,1)} \\ \hat{\theta}_{(2,2)} \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{(2,N)} \end{bmatrix}, \dots, \hat{\theta}_{(N)} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{(N,1)} \\ \hat{\theta}_{(N,2)} \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{(N,N)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中  $N$  表示现在时刻。

有了上述参数  $\theta$  的估值序列, 就可以用模型(1)进行预测分析(3)。首先以序列(5)为依据, 对时变参

数进行预报,其途径有:一是按分量处理的途径,此时估计  $p$  个序列  $\hat{\theta}_{i(1)}, \hat{\theta}_{i(2)}, \dots, \hat{\theta}_{i(N)}, i=1, 2, \dots, p$ ; 二是对序列(5)按整体处理的途径,此时,可利用一些常规时序分析方法如 AR 模型等进行预报。

设现已由序列  $\hat{\theta}_{(1)}, \hat{\theta}_{(2)}, \dots, \hat{\theta}_{(N)}$  预报得到  $\hat{\theta}_{(N+1)}, \hat{\theta}_{(N+2)}, \dots, \hat{\theta}_{(N+n)}$  代入(1),有:

$$\hat{y}_{(N+i)} = f[x_{(N+i)}, \hat{\theta}_{(N+i)}, N+1] \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

为  $N+i$  时刻的  $y_{(N+i)}$  预报值。

## 2 误差分析

考虑模型

$$y_{(k)} = x_{(k)} \cdot \theta_{(k)} + \epsilon_{(k)}$$

其中  $\epsilon_{(k)}$  是  $p$  维时变参数,  $x_{(k)}$  是  $p$  维向量函数,所要估计的预报误差是:

$$\epsilon(N+n, \hat{\theta}_{(N+n)}^*) = y_{(N+n)} - \hat{y}_{(N+n)} = x_{(N+n)} \cdot \theta_{(N+n)} - x_{(N+n)} \cdot \hat{\theta}_{(N+n)}^* + \epsilon_{(N+n)}$$

误差可变部分

$$\begin{aligned} |x_{(N+n)} \cdot \theta_{(N+n)} - x_{(N+n)} \cdot \hat{\theta}_{(N+n)}^*| &= |x_{(N+n)} \cdot (\theta_{(N+n)} - \hat{\theta}_{(N+n)}^*)| \leq \\ &= \|x_{(N+n)}\| \|\theta_{(N+n)} - \hat{\theta}_{(N+n)}^*\| = \|x_{(N+n)}\| \|\bar{\theta}_{(N+n)}\| \end{aligned}$$

其中  $\bar{\theta}_{(N+n)} = \theta_{(N+n)} - \hat{\theta}_{(N+n)}^*$

当非线性形式时,考虑模型:

$$y_{(k)} = f[x_{(k)}, \theta_{(k)}, k] + \epsilon_{(k)}$$

$$\hat{y}_{(N+n)} = f[x_{(N+n)}, \hat{\theta}_{(N+n)}^*, N+n]$$

$$y_{(N+n)} = f[x_{(N+n)}, \theta_{(N+n)}, N+n] + \epsilon_{(N+n)}$$

如果相应的梯度都存在,则预报误差可变部分满足:

$$\overline{f[x_{(N+n)}, \theta_{(N+n)}, N+n] - f[x_{(N+n)}, \hat{\theta}_{(N+n)}^*, N+n]} = \nabla_{\bar{\theta}_{(N+n)}} f[x_{(N+n)}, \bar{\theta}_{(N+n)}, N+n]^T \cdot \bar{\theta}_{(N+n)}$$

其中  $\bar{\theta}_{(N+n)}$  表示  $\hat{\theta}_{(N+n)}^*$  与  $\theta_{(N+n)}$  的连线上的一点,而  $\bar{\theta}_{(N+n)} = \theta_{(N+n)} - \hat{\theta}_{(N+n)}^*$ ,如果有常数  $C$ ,使得

$$\|\nabla_{\bar{\theta}_{(N+n)}} f[x_{(N+n)}, \bar{\theta}_{(N+n)}, N+n]\| < C \quad a.s.$$

则有

$$|f[x_{(N+n)}, \theta_{(N+n)}, N+n] - f[x_{(N+n)}, \hat{\theta}_{(N+n)}^*, N+n]| \leq C \|\bar{\theta}_{(N+n)}\| \quad a.s.$$

上述分析表明,向前  $n$  步的预报误差,依赖于时变参数的预报误差  $\bar{\theta}_{(N+n)}$ 。由于对参变量  $\theta_{(k)}$  进行了预报,所以预报精度应有较大提高。

## 参 考 文 献

- 1 方开泰. 实用回归分. 北京: 科学出版社, 1988
- 2 Z. G. Han. A Recursive Estimates Method of the Nonlinear Stochastic System and Its Convergence Analysis. Identification and System Parameter Estimation. Sixth IFAC Symposium. Virginia, U. S. A, 1982

# Multistage Estimation Methods of Dynamic Nonlinear Model Parameter

Li Bin

(Department of Students of Yancheng Institute of Technology, Yancheng 224003, PRC)

**Abstract** Forms the multistage system which is used as the state prediction. At present, the use of the usual prediction method is limited for the logner the prediction period is, the larger the prediction error is. This article means to introduce the multistage estimation methods of dynamic nonlinear model parameter, and analyses the error of the prediction, expected to improve the precis of prediction.

**Keywords** nonlinear model; parameter; prediction