

正交异性光弹性实验应力分析的矩阵理论

史友进

(盐城工学院基础科学部, 盐城 224003)

摘要 应力-光定律是光弹性实验应力分析的基本理论。从正交异性光弹性的物理机制出发, 运用矩阵理论, 建立了正交异性光弹性应力-光定律, 讨论了正交异性光弹性试验方法。

关键词 正交异性 光弹性 应力-光定律 矩阵理论

分类号 O343

应力-光定律是光弹性实验应力分析的基本理论。近30年来, 一些研究者对正交异性光弹性复合材料的应力-光定律进行了研究。Pin 和 Knight^[1]首先开创了这个领域, 并在应力分配法的基础上导出了应力-光定律。以后, Sampson^[2]假设了双折射莫尔圆的概念, 并按正交异性的需要引入了3个光弹性常数的概念, 在此基础上建立了应力-光定律。后来的一些实验结果也与 Sampson 的应力-光定律基本符合。因此, Sampson 的应力-光定律已经为正交异性光弹性实验应力分析这个研究领域的研究者普遍接受。但是 Sampson 假设的双折射莫尔圆的概念, 没有清晰的物理解释, 需要从理论上加以研究。本文从正交异性光弹性的物理机制出发, 运用矩阵理论进行严格的数学推导, 建立了正交异性光弹性复合材料的应力-光定律, 简述了正交异性光弹性试验方法。对 Sampson (Prabhakaran) 的应力(应变)-光定律进行了讨论。在正交异性光弹性的矩阵理论的基础上, 提出了正交异性光弹性应变分析的各向同性化方法, 并进行了数值模拟, 结果表明对于弱正交异性光弹性复合材料, 该方法的精度是很高的, 对于正交异性光弹性复合材料, 该方法的精度是可以接受的。

1 正交异性光弹性的物理机制

1.1 光弹性实验参数的物理意义

在图1中, 设波长为 λ 的入射偏振光振动面在正交异性光弹性材料主轴1方向, 进入光弹性模型中分解为振动面分别在 Ox 和 Oy 轴方向, 折射分别为 n_x 和 n_y 的偏振光。图中 θ 即为正交异性光弹性实验参数之一的等倾线参数。而等差线参数是偏振光干涉的条纹级数 N 。由相干条件得

$$N = \frac{d(n_x - n_y)}{\lambda} \quad (1)$$

式中 d 为模型厚度。

1.2 正交异性光弹性的物理机制

模型材料的双折射效应起源于物质结构的各向异性。物质结构的各向异性可以用物性方程^[3]

$$E_i = \frac{1}{\epsilon_{ii}} \eta_{ij} D_j \quad (2)$$

描述。式中 ϵ_{ii} 为真空介电常数, E_i 、 D_j 和 η_{ij} 分别为电场强度分量、电位移分量和介电不可渗透张量的元素。上式采用了爱因斯坦求和规则。对于平面问题, 在主轴坐标系中

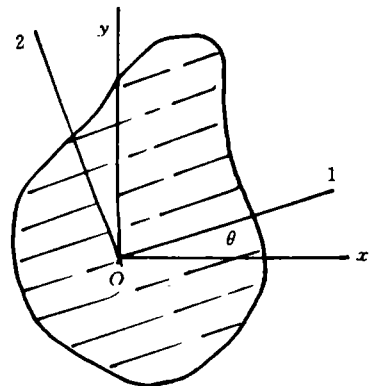


图1 复合材料主轴从标系和双折射主轴坐标系

$$\eta = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_y^2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中 n_x 和 n_y 为主折射率。

光弹性效应是指模型中存在应力时模型材料产生双折射效应。这一效应可以用介电不可渗张量随应力张量的改变定量描述。在线性条件下

$$\delta\eta_{ij} = A_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (4)$$

式中 σ_{kl} 是应力张量的元素, A_{ijkl} 是一四阶张量(称为应力光弹性系数张量)的元素。对于平面问题, 在正交异性光弹性材料主轴坐标系中, 采用缩减脚标规则 $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 12 \rightarrow 6$, 式(4)可写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \delta\eta_1 \\ \delta\eta_2 \\ \delta\eta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (5)$$

简记为

$$[\delta\eta] = [A][\sigma] \quad (6)$$

上式为正交异性光弹性效应的矩阵方程, 是我们推导应力-光定律的物理依据。

2 正交异性光弹性材料的应力-光定律的推导

根据前述光弹性实验参数的物理意义, 可知应作坐标变换, 使介电不可渗张量对角化。坐标旋转的角度由光弹性实验的等倾线参数决定(见图 1)。这里需指出, 对于各向同性光弹性材料, 介电不可渗张量与应力张量将同时对角化, 对于正交异性光弹性材料, 它们一般不能同时对角化。

设 $m = \cos\theta, n = \sin\theta$, 则将式(6)左乘变换矩阵

$$T = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

有

$$[\delta\bar{\eta}] = [T][\delta\eta] = [T][A][\sigma] = [T][A][T]^{-1}[T][\sigma] = [\bar{A}][\bar{\sigma}] \quad (8)$$

式中

$$[\bar{A}] = [T][A][T]^{-1} \quad (9)$$

为模型的双折射主坐标系中的应力光弹性系数矩阵。 $[\bar{\sigma}] = [T][\sigma]$ 则为该坐标系中应力列矩阵。式(9)中各元素的变换关系由下列矩阵式表示

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} \\ \bar{A}_{22} \\ \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{66} \\ \bar{A}_{16} \\ \bar{A}_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 2m^2n^2 & -m^2n^2 \\ n^4 & m^4 & 2m^2n^2 & -m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & m^4 + n^4 & m^2n^2 \\ -4m^2n^2 & -4m^2n^2 & 8m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 \\ 2m^3n & -2mn^3 & -2(m^3n - mn^3) & m^3n - mn^3 \\ 2mn^3 & -2m^3n & 2(m^3n - mn^3) & -(m^3n - mn^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{12} \\ A_{66} \end{bmatrix} \quad (10)$$

利用关系式

$$\delta\bar{\eta}_i = \delta\left(\frac{1}{n_i^2}\right) = -\frac{2}{n_i} \delta n_i \approx -\frac{2}{n_{i0}} (n_i - n_{i0}) \quad (11)$$

式(8)可写成

$$[\delta n] = \frac{n_{i0}}{2} [\bar{A}][\bar{\sigma}] \quad (12)$$

综合式(1)、式(12), 记

$$[B] = -\frac{d}{\lambda} \frac{n_o^3}{2} [\overline{A}]$$

(13)

我们得到

$$\left. \begin{aligned} N &= (B_{11} - B_{12})\bar{\sigma}_1 + (B_{12} - B_{22})\bar{\sigma}_2 + (B_{16} - B_{26})\bar{\sigma}_6 \\ 0 &= B_{16}\bar{\sigma}_1 + B_{26}\bar{\sigma}_2 + B_{66}\bar{\sigma}_6 \end{aligned} \right\}$$

(14)

式(14)即为正交异性光弹性材料的应力-光定律。它表明,正交异性光弹性的等差线参数与模型双折射主轴坐标系中的应力张量各元素的线性代数和成正比,系数是等倾线参数的函数。

3 正交异性光弹性实验方法

正交异性光弹性实验方法与各向同性光同性实验方法类似。通常先要标定正光异性光弹性模型光弹性能,这可以在四种已知应力状态下测定等倾线参数 θ 和等差线参数 N ,代入式(14)前一式,得到关于 A_{11} 、 A_{22} 、 A_{12} 、 A_{66} 的四元一次方程组,从而可解得 A_{11} 、 A_{22} 、 A_{12} 、 A_{66} 。;然后进行光弹性实验,必须仔细测得光弹性实验的两个重要参数,最后作应力分离,这需要用理论方法或实验方法再补充一个方程,才能与式(14)的二式联立,解得 $\bar{\sigma}_1$ 、 $\bar{\sigma}_2$ 、 $\bar{\sigma}_6$ 。

参 考 文 献

1 Pin. H and Knight, C. E. ,Photoelastic Analysis of Anisotropic Fiber Reinforces Composites, J. Composite Materials, 1969,3(1)

2 Sampson, R. C. A Stress—Optic Law for Photoelastic Analysis of Orthotropic Composites, Exp Mech 1970,10(5)

3 胡鸿章,凌世德. 应用光学原理. 北京:机械工业出版社,1993

The Array Theory Of The Experimental Stress
Analysis Of The Orthotropic Photoelastics

Shi Youjin

(Department of Basic Science of Yancheng Institute
of Technology, Yancheng 224003, PRC)

Abstract The stress—optic law is the basic theory of the photoelastic experimental stress analysis. It is contributed by the array theory based on othotropic photoelastic. physical mechanism. The experimental method is discussed.

Keywords Orthotropic photoelastics; stress-optic law; array theory