载流螺线管磁场的全空间解*

徐宗武
（江苏理工大学成人教育学院盐城函授站，盐城 224001）

摘　要　针对普通物理学中螺线管模型不能说明的无限长载流密绕螺线管外的磁感应强度不为零的问题，提出建立与实际更接近的螺线管模型，进而计算出其全空间的磁感应强度。

关键词　螺线管　磁感应强度　全解
分类号　O44

1　问题的提出

在求解载流直螺线管内、外磁场时，几乎每种普通物理教材都将螺线管看成一串共轴的圆电流组成，这些圆电流彼此绝缘不相通"。这种模型的载流螺线管外面的磁场为零[1]，因此磁感应强度的环流 $\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 亦等于零；而实际的螺线管，在外绕一周的环路有电流 I 通过，按安培环路定理有：$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I$[2]。由此可见，一般教材上关于螺线管的模型要改变。本文试图建立与实际更加接近的螺线管模型，进而准确地计算出其全空间的磁感应强度的大小和方向。

2　分析

实际的螺线管中电流是沿管面螺旋线流动的。设该螺线管是由薄条形导线（横截面是窄矩形）密绕而成（如导线横截面是圆形，结果一样），如图1。

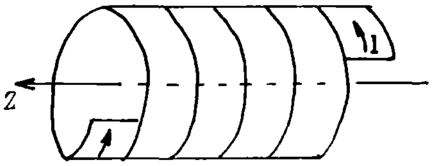

图1　螺线管中电流流动方向

如果导线的宽度为 d，螺线管的直径为 D，则螺线管任一段管壁展开如图2，其中通过垂直电流方向单位长度的电流——电流密度 j 及其平行与轴线的分量 $j_{\parallel}$ 和垂直与轴线的分量 $j_{\perp}$ 为：

$$j=\frac{I}{d}$$

$$j_{\parallel}=j\sin\theta=\frac{I}{d}\cdot\frac{d}{\pi D}=\frac{I}{\pi D}$$

$$j_{\perp}=j\cos\theta=\frac{I}{d}\cdot\frac{\sqrt{(\pi D)^2-d^2}}{\pi D}=\frac{I}{d}\sqrt{1-\left(\frac{d}{\pi D}\right)^2}$$

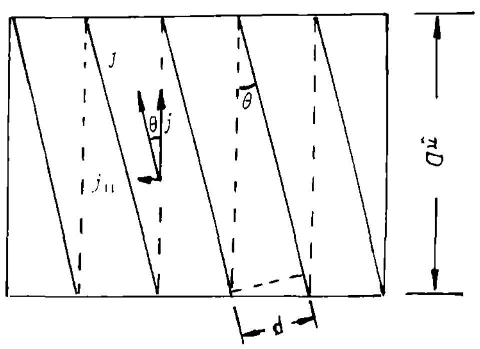

图2　螺线管管壁展开图

以螺线管轴线为 Z 轴，设柱面坐标系如图3。空间任一点 p 处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 分解为 B_ρ、B_φ 和 B_z。根据对称性可知道：（1）在全空间，$\boldsymbol{B}$ 应与 φ 无关；（2）因为螺线管无限长，在全空间 $\boldsymbol{B}$ 应与 Z 无关。即 $\boldsymbol{B}(\rho,\varphi,z)=\boldsymbol{B}(\rho)$，$\boldsymbol{B}$ 只与 ρ 有关。

3　计算

（1）管内磁场。计算 B_φ：在垂直 Z 轴的平面内，以 Z 轴上某点为圆心，作半径为 ρ（$\rho<D/2$）的圆形闭合曲线 L，则环路 L 所包围的电流为零，故安培环路定理表示为：

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_L B_\varphi\cdot\mathrm{d}l=B_\varphi\cdot 2\pi\rho=0$$

所以，在管内 $B_\varphi=0$。即磁感应线在通过 Z 轴的平

* 收稿日期：1999－05－26

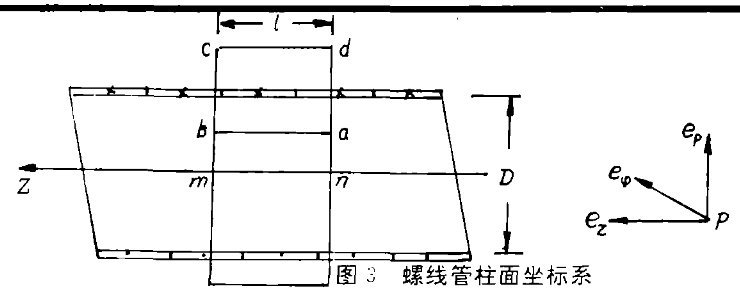

图 3　螺线管柱面坐标系

面内。由于对称性，与 Z 轴平行的直线上（如 ab 线）的磁场方向相同即磁感应线彼此平行。又因为 Z 轴上磁感应线方向沿 Z 轴，所以在管内磁感应线必与 Z 轴平行，否则磁感应线要相交。至此，再选 $abmn$ 矩形环路，用安培环路定理，可以证明管内磁场是均匀的。由毕—萨定律证明，在 Z 轴上的磁感 应强度为 $\boldsymbol{B}=\mu_0 j_\perp \boldsymbol{e}_z$[1]，所以在螺线管内的磁感应强度都为：

$$\boldsymbol{B}=\mu_0 j_\perp \boldsymbol{e}_z=\frac{\mu_0 I}{d}\sqrt{1-\left(\frac{d}{\pi D}\right)^2}\boldsymbol{e}_z(\rho<D/2)$$

（2）管外磁场。计算 B_z：将安培环路定理用于图 3 中 $abcd$ 矩形回路，其中 $ab=cd=l$，环路所包围的电流等于 $j_\perp l$，故：

$$\oint_{abcda}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_a^b B_z\mathrm{d}l+\int_b^c B_\rho\mathrm{d}l+\int_c^d B_z\mathrm{d}l+\int_d^a B_\rho\mathrm{d}l=\mu_0 j_\perp l$$

因（1）中求出管内磁感应强度 $B=B_z=\mu_0 j_\perp$，所以

$$\int_a^b B_z\mathrm{d}l=\mu_0 j_\perp l \quad 由于对称 \int_b^c B_\rho\mathrm{d}l+\int_d^a B_\rho\mathrm{d}l=0$$

所以 $\int_c^d B_z\mathrm{d}l=0$，即在管外 $B_z=0$。下面计算管外 B_ρ：以 Z 轴为中心轴，作一长为 l，半径为 $\rho(\rho>D/2)$ 的圆筒形闭合面 S，参见图 3。由磁场中"高斯定理"有：

$$\oiint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{左面}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{右面}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{侧面}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

其中等号右边前两项和为零，第三项为 $2\pi\rho l B_\rho$

故　　$B_\rho=0$

再计算管外 B_φ：在垂直 Z 轴的平面内，以 Z 轴上的某点为圆心，作半径为 ρ 的圆形闭合曲线 L，则环路 L 所包围的电流为 $j_{//}\cdot\pi D=I$（参见图 3），故安培环路定理表示为：

$$\oint_L\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_L B_\varphi\mathrm{d}l=B_\varphi\cdot 2\pi\rho=\mu_0 I$$

$$B_\varphi=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

这就解决了开始提出的问题。

4　总结

实际的螺线管导线中的电流密度可分解成两个分量，一个分量 $j_\perp$ 沿管壁垂直于管的轴线，形成圆形电流，而产生螺线管内部磁场；另一个分量 $j_{//}$ 沿管壁平行于管的轴线，形成管状电流，而产生螺线管外部磁场，其中：

$$\boldsymbol{B}=B_z\boldsymbol{e}_z=\mu_0 j_\perp \boldsymbol{e}_z=\frac{\mu_0 I}{d}\sqrt{1-\left(\frac{d}{\pi D}\right)^2}\boldsymbol{e}_z(\rho>D/2)$$

$$\boldsymbol{B}=B_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\varphi(\rho>D/2)$$

这个结论与一般普通物理教科书是不同的。当 $d\ll D$ 时，管内磁感应强度表达式与一般教材中表达式的意义是相同的，但管外磁场仍存在，且不能忽略。

参　考　文　献

1　赵凯华，陈熙谋. 电磁学. 上册. 北京：人民教育出版社，1978：288～291

2　赵凯华，陈熙谋. 电磁学. 上册. 北京：人民教育出版社，1978：306

Total space solve of magnetic field of solenoid holding current

Xu Zhongwu

(Yancheng Branch of Correspondence, Education College for Adoults, Jiangsu University of Technology, Yancheng 224001, PRC)

Abstract Actually, magnetic induction is not zero for unlimited length solenoid holding current. This viewpoint can not be explained by soleniod model in genera physics. The object of this thesis is to establish more practical solenoid model and calculate total space solve of magnetic induction.

Keywords solenoid; magnetic induction; total space solve