

关于 Mcshane 可积函数的测度逼近

季红蕾

(盐城工学院基础部, 盐城 224003)

摘 要 在高维空间中引入阶梯函数来刻画 Mcshane 积分, 进一步揭示了 Mcshane 积分与 Lebesgue 积分之间的内在联系。

关键词 Mcshane 积分 外测度 阶梯函数

分类号 O174

Lebesgue 积分在测度理论的基础上于 1902 年建立起来。1973 年, E. J. Mcshane 在研究完全 Riemann 型的非绝对积分——Henstock 积分之后, 建立了一种新的积分, 后来人们称之为 Mcshane 积分, 它的定义是 Riemann 型的, 并且不必用到测度理论, 具有一定的直观性。后来被证明了 Mcshane 积分等价于 Lebesgue 积分, 这使得人们可从另一侧面进一步探讨 Lebesgue 积分的若干性质。本文在文献[2]、[3]的基础上, 在高维空间中引入阶梯函数来刻画 Mcshane 积分, 使得对 Mcshane 积分的本质有更深刻的了解, 从而进一步揭示了 Mcshane 积分与 Lebesgue 积分之间的内在联系。

1 基本定义与性质

定义 1: 设 E 是 n 维空间中一闭区间, $\delta(x)$ 为定义在 E 上的一正值函数, 所谓 E 上的 δ -精细分法 $D = \{(I, x)\}$ 是指 $\{I\}$ 是 E 上互不重叠的有限个闭区间列, $\cup I = E$, 且满足

$$x \in I \subset U(x, \delta(x)),$$

这里 $U(x, \delta(x))$ 是以 x 为中心, $\delta(x)$ 为半径的开球。称 x 为对应于 I 的结点。

如果仅要求 $I \subset U(x, \delta(x))$, 则称 D 为 δ -精细 M 分法。

由 Heine-Borel 复盖定理得知以上的方法 D 必存在。

定义 2: 设 $f(x)$ 为定义在区间 E 上的一个函

数, 如果存在实数 A , 使得对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta(x) > 0$, 对 E 上任何 δ -精细分法 D , 有

$$|(D) \sum f(x) |I| - A| < \epsilon,$$

这里 $|I|$ 指 I 的外测度, 也即 I 的体积, 则称 $f(x)$ 在 E 上 Henstock 可积, 简称 H-可积, 记作

$$f \in H(E) \text{ 或 } f \in H$$

如果对任何 δ -精细 M 分法 D , 有

$$|(D) \sum f(x) |I| - A| < \epsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 E 上 Mcshane 可积, 简称 M-可积, 记作 $f \in M(E)$ 或 $f \in M$ 。

显然, M-可积必为 H-可积。

定义 3: 设 $f(x)$ 为定义区间 E 上定义的实函数, 所谓 δ -精细分法 D 或 δ -精细 M 分法 D 所对应的阶梯函数 $S(x)$, 是指

$$S(y) = f(x), y \in I$$

这里 I, x 是分法 D 中的偶对 (I, x) 。注意当 y 属于 I 的边界时, 可以任意取定 I 所对应的某一 x 的值 $f(x)$, 只要保证函数 $S(x)$ 单值即可。

显然 $S(x)$ 在 E 上 Riemann 可积, 且

$$(R) \int_E S(x) dx = (D) \sum f(x) |I|$$

由定义可以证明下述 Cauchy 型收敛定理, 其证明见文献[3]。

定理 1: 设 $f(x)$ 是 E 上定义的函数, $f \in M$ 当且仅当对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta(x) > 0$, 对 E 上任何 δ -精细 M 分法的任何两个分法 D 与 D' , 有

$$|(D) \sum f(x) |I| - (D') \sum f(x) |I| - A| < \epsilon$$

2 被积函数的可测性

由上可知, H—积分与 M—积分定义简单, 更主要的是它们无需引入测度概念。但一般地说来, 外测度概念还是需要的。下文中有时提到的“测度”或“可测”词语只是为了与过去的理论作必要的沟通。

由实变函数的理论可知, 一个函数的可测性为该函数 Lebesgue 可积的前提条件, 那么由上述定义的 M—可积函数是有什么特征的函数呢? 由于 M—可积与 L—可积等价, 故猜测 M—可积函数也应是可测的, 要证明这一点, 一般地要证明存在 M—可积函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$, $F(x)$ 在 E 上连续且 $F'(x) = f(x)$ a. e., 从而导致 f 可测。这里引入一列阶梯函数依测度收敛于 $f(x)$, 从而 $f(x)$ 可测。一般地依测度收敛的定义是用测度来描述的, 这里, 改为用外测度描述。

定义 4: 设 $\{f_n(x)\}$ 是在可测集 E 上几乎处处有限的可测函数列, 又 $f(x)$ 是在 E 上定义的几乎处处有限的函数, 若对 $\forall \sigma > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E(|f_n - f|) \geq \sigma| = 0,$$

即对 $\forall \epsilon > 0, \forall \sigma > 0, \exists N$, 对所有 $n \geq N$, 有

$$|E(|f_n - f|) \geq \sigma| < \epsilon$$

则称 f_n 依测度收敛于 $f(x)$, 记作 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, 这里 $|E(\cdot)|$ 表示 E 的外测度。

在上述条件下, 可以证明 $f(x)$ 必为可测函数, 事实上, 在这种情况下, 可以证明 Riesz 定理成立, 于是有子序列几乎处处收敛于 $f(x)$, 从而 $f(x)$ 可测。为此先证明下述引理。

引理: 设 $f \in M(E)$, 给定 $\sigma > 0$, 则对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists$ 阶梯函数 $s(x)$, 使得

$$X = \{x \in E, |f(x) - s(x)| \geq \sigma\}$$

的外测度小于 $2\epsilon/\sigma$, 即 $|X| < 2\epsilon/\sigma$ 。

证明: 记

$$X_1 = \{x \in E: f(x) - S(x) \geq \sigma\}$$

$$X_2 = \{x \in E: f(x) - S(x) \leq -\sigma\}$$

因 $f \in M$, 故对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(x) > 0$, 对任何 δ —精细 M 分法的任两个分法 D 与 D' , 有

$$|(D) \sum f(x) |I| - (D') \sum f(x) |I|| < \epsilon,$$

对于给定的 δ —精细 M 分法 D , 可以确定一个阶梯函数 $S(x)$, 现今

$$\mu = \{I: I \text{ 是 } E \text{ 内的闭正方形}, x \in I \subset U(x, \delta(x)), x \in X_1\}$$

则 μ 是 X_1 的一个 Vitali 复盖, 由 Vitali 定理, 对 $\forall \eta > 0$, 存在不重的有限区间列 $\{I \in \mu\}$, 使得

$$|X_1| \leq \sum |I| + \eta$$

在 E 中挖去 $\cup I$, 这样 E 中的对于分法 D 余下的部分 (或许要做必要的细分) 仍是 δ —精细 M 分法的部分分法, 把它们再与 $\{I, x\}$ 合并成 E 上的 δ —精细 M 分法 D' , 由

$$0 < \sum (f(x) - S(x)) |I| =$$

$$(D') \sum f(x) |I| - (D) \sum f(x) |I| < \epsilon,$$

得 $\sigma \sum |I| < \epsilon$, 或 $\sum |I| < \frac{\epsilon}{\sigma}$

从而 $|X_1| < \frac{\epsilon}{\sigma} + \eta$

由 η 的任意性可得 $|X_1| < \frac{\epsilon}{\sigma}$,

同理可证 $|X_2| < \frac{\epsilon}{\sigma}$, 从而 $|X| < \frac{2\epsilon}{\sigma}$, 证毕。

由此立得下述定理。

定理 2: 设 $f \in M(E)$, 则对 $\forall \epsilon_n \searrow 0, \exists \delta_n(x) > 0$, 对任何 E 上的 δ_n —精细 M 分法 D_n 所对应的阶梯函数 $S_n(x)$, 有

$$S_n(x) \Rightarrow f(x),$$

且 $f(x)$ 在 E 上可测。

参 考 文 献

- 1 丁传松, 李秉彝. 广义黎曼积分, 北京: 科技出版社, 1989
- 2 Lee, P. Y. Lanzhou Lectures, on Henstock Integration, World Scientific Pub. co., 1989: 443~448
- 3 许东福. LSRS 性质与 KH—积分的收敛定理, 数学物理学报, 1997(4): 15~18
- 4 江泽坚. 实变函数论, 北京: 高等教育出版社, 1958

Measure approximation on Mcshane integrable function

Ji Honglei

(Department of Basic Science of Yancheng

Institute of Technology, Yancheng 224003, PRC)

Abstract This essay introduces the step function to describe the Mcshane integration in a higher dimensional space which shows the inner relationship between the Mcshane integration and the Lebesgue integration.

Keywords Mcshane integration; outer measure; step function