Jacobi型方法的一些研究*

薛长峰
(盐城工学院基础部,江苏 盐城 224003)

摘 要 回顾了Jacobi方法与拟-Jacobi方法的发展历史,介绍了并行Jacobi方法与并行拟-Jacobi方法的研究现状。针对网格状分布式多处理机系统就非对称广义特征值问题设计了一种拟-Jacobi方法的并行处理方案,并对G.W.Stewart提出的一种算法做了修正。

关键词 Jacobi方法; 拟-Jacobi方法; 非对称广义特征值; 并行计算
分类号 O241 **文献标识码** A **文章编号** 1008-5092(2000)01-0011-07

Jacobi方法的提出是在1846年[1],它用来计算实对称矩阵的特征值,而拟-Jacobi方法的提出可追溯到Greenstadt 1955年的文章[2],Greenstadt之后研究拟-Jacobi方法的文章[3~10],拟-Jacobi方法是用来处理非对称情况下的矩阵特征值问题。

实对称矩阵Jacobi和非对称实矩阵拟-Jacobi方法并行化的第一篇文章是A.H.Sameh于1971年发表的[11]。近20年来,关于这两个方法并行化的工作,可参阅文献[11~34],其中[12~18]讨论了实对称矩阵Jacobi方法的并行处理并在不同机型上予以实现,文献[19][20]研究了非对称矩阵的并行拟-Jacobi方法,文献[21]研究了实对称矩阵Jacobi方法的加速问题,文献[22]首先将Jacobi方法推广到广义特征值问题上并在DAP上实现,文献[23]研究了非对称广义特征值问题的并行处理,文献[24]则讨论了非对称广义特征值问题的拟-Jacobi方法的加速,文献[25][26]是关于Jacobi型方法收敛性的讨论,而文献[27][28][29]则讨论了与Jacobi型方法有关的Jacobi序与Jacobi对问题。对称问题研究得较成熟,非对称问题的研究工作国内外仍不多。作者在文献[30]中的工作属于多处理机系统非对称广义特征值问题拟-Jacobi型并行处理。

1 Jacobi方法与拟-Jacobi方法

古典Jacobi方法的基本思想是用一系列由平面旋转矩阵构成的正交相似变换将实对称矩阵化为对角阵的方法,具体地说构造序列:

$$A_0 = A, A_k = R_k^{\mathrm{T}} A_{k-1} R_k \quad (k=1,2,\cdots)$$

其中:$R_k(i,i)=1, \quad i \neq p,q$

$$R_k(i,i)=\cos\theta, \quad i=p,q$$

$$R_k(i,j) = -R_k(j,i) = \sin\theta, i=p, j=q$$

$$R_k(i,j)=0 \quad i,j=\text{其它}$$

p,q,θ 按一定原则确定

记 $A_{k-1}=(a_{ij}{}^{(k-1)}), A_k=(a_{ij}{}^{(k)})$

则有 $a_{ij}{}^{(k)} = a_{ij}{}^{(k-1)} \quad (i,j \neq p,q)$

$$a_{pi}{}^{(k)} = a_{ip}{}^{(k)} = a_{ip}{}^{(k-1)}\cos\theta - a_{iq}{}^{(k-1)}\sin\theta(i \neq p,q)$$

* 收稿日期:1999-11-03
作者简介:薛长峰(1966-),男,江苏建湖县人,讲师,理学硕士,从事计算数学研究。

$$a_{qi}^{(k)} = a_{iq}^{(k)} = a_{ip}^{(k-1)}\sin\theta - a_{iq}^{(k-1)}\cos\theta(i\neq p,q)$$

$$a_{pp}^{(k)} = a_{pp}^{(k-1)}\cos^2\theta + a_{qq}^{(k-1)}\sin^2\theta - 2a_{pq}^{(k-1)}\sin\theta\cos\theta$$

$$a_{qq}^{(k)} = a_{pp}^{(k-1)}\sin^2\theta + a_{qq}^{(k-1)}\cos^2\theta + 2a_{pq}^{(k-1)}\sin\theta\cos\theta$$

$$a_{pq}^{(k)} = a_{qp}^{(k)} = (a_{pp}^{(k-1)} - a_{qq}^{(k-1)})\sin\theta\cos\theta + a_{pq}^{(k-1)}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1/2(a_{pp}^{(k-1)} - a_{qq}^{(k-1)})\sin 2\theta + a_{pq}^{(k-1)}\cos 2\theta$$

为了使 $a_{pq}^{(k)}=0$,即消去(p,q)位的元素,必须选择这样的旋转角

$$\mathrm{tg}\,2\theta = \frac{-a_{pq}^{(k-1)}}{1/2(a_{pp}^{(k-1)} - a_{qq}^{(k-1)})} \quad 常限制 -\pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi/4$$

若 $a_{pp}^{(k)} - a_{qq}^{(k-1)} = 0$,则 $\theta=\pi/4$, $a_{pq}^{(k-1)}>0$ 时, $\theta=-\pi/4$, $a_{pq}^{(k-1)}<0$ 时,这样确定的旋转角所对应的旋转矩阵就能使 $A_k = R_k^{\mathrm{T}}A_{k-1}R_k$ 中的 $a_{pq}^{(k)}=0$,然而即使 $a_{pj}^{(k-1)}=0$ 或 $a_{qj}^{(k-1)}=0$ 一般来说,经过旋转变换后它们往往不再为 0,所以通过旋转变换消去对称矩阵的非对角元素的方法不是一个有限的过程而一个无限迭代的过程,过程进行到所有非对角元满足预先指定的精度要求为止。

Jacobi 方法的收敛性基于下面的结果:矩阵的非对角元的平方和 $E(A) = \sum_{i\neq j}^{i,j=1,n} a_{ij}^2$ 在每一次正交相似变换后减少。

拟-Jacobi 方法类似于 Jacobi 方法,它用来处理非对称矩阵特征值问题,具体地说对任意复矩阵 A 总可以找到一系列的 2 维平面旋转 $P_i(k,m)$来约化 A,使得 A 任意接近正规阵[5],容易验证对于近似 H 阵用拟-Jacobi 方法处理 A 将接近于对角阵。

2 并行 Jacobi 方法和并行拟-Jacobi 方法

2.1 对称情形

2.1.1 标准特征值问题

A.H.Sameh 1971 年著文献[11]研究实对称矩阵特征值问题的 并行求解并在 ILLIAC-IV 机上实现,其基本思想是每次旋转变换设法消去多于一对的非对角元.Sameh 对主元对$(p.q)$的选取如下:

a.对 $k=1,2,\cdots m-1$

$$q = m-k+1, m-k+2, \cdots n-k$$

$$p = \begin{cases} (2m-2k+1)-q, & m-k+1\leqslant q\leqslant 2m-2k \\ (4m-2k)-q, & 2m-2k<q\leqslant 2m-k-1 \\ n, & 2m-k-1<q \end{cases}$$

b.对 $k=m,m+1,\cdots 2m-1$

$$q = 4m-n-k, 4m-n-k+1, \cdots 3m-k+1$$

$$p = \begin{cases} n, & q<2m-k+1 \\ (4m-2k)-q, & 2m-k+1\leqslant q\leqslant 4m-2k-1 \\ (6m-2k-1)-q, & 4m-2k-1<q \end{cases}$$

Sameh 的算法是针对 SIMD 型 ILLIAC-IV 机设计的,这种算法不适合于多处理机系统,关于多处理机系统,M.Berry 和 A.H.Sameh 提出了另一种方案,并在 Alliant FX/8 上实现[16]。

另外,对于环状多处理机系统 R.A.Whiteside 等人[14]也研究了实对称矩阵特征值的并行计算,对于具有不同实特征值的矩阵 R.O.Davies 和 J.J.Modi 研究了并行 Jacobi 方法的加速问题[21],在网格状连结的机型上 Brent 和 Luk 也研究了对称矩阵特征值的并行 Jacobi 方法[13]。

2.1.2 广义特征值问题

关于对称广义特征值问题 $AX=\lambda BX$(A、B 为实对称矩阵,B 为非负定的矩阵)的并行处理,周树荃、邓绍忠、曾岚等在这方面进行了大量系统而又深入的工作,他们研究了并行保域行列式查找法,并行保域多分法,并行子空间迭代法,并行分块子空间迭代法, 并行 EBE-逆迭代法,并行 EBE-子空间迭代法,并行 EBE-Lanczos 方法请参阅文献[34],另外 Modi 等人也研究过这个问题的并行 Jacobi 方法,可参阅文

献[12],这里不再详述。

2.2 非对称情形

2.2.1 标准特征值问题

G.W.Stewart 和 P.J.Eberlein 分别于 1985 年和 1987 年著文研究非 H 阵的并行拟-Jacobi 方法[19,20],其中后者曾系统地探讨过串行拟-Jacobi 方法,两人对非 H 阵的并行处理方法有所不同,下面分别予以简介。

G.W.Stewart 的工作类同于 Jacobi 方法约化对称矩阵时的情形,其基本思路是通过酉相似变换约化矩阵为上三角阵,即 $U^* AU = T$, T 为上三角阵(矩阵的 Schur 分解)。考虑二阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

$A(c,s)^T = a_{11}'(c,s)^T$, $|c|^2 + |s|^2 = 1$, $(c,s)^T$ 是矩阵A 的欧氏范数为 1 的特征向量,令 $R = \begin{pmatrix} c & -\bar{s} \\ s & \bar{c} \end{pmatrix}$,

则 $A' = R^H AR = \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ 0 & a_{22}' \end{pmatrix}$

相应的 Schur 旋转有两个,其中$|c|$较大者定义为内旋转(inner Schur)旋转,另一个定义为外旋转(outer Schur 旋转),显见内旋转更接近于单位阵。

G.W.Stewart 算法:对矩阵并行实施 Schur 旋转,其中主元列的选取为:

$(1,2),(2,3),\cdots(n-2,n-1),(n-1,n)$

$(1,2),(2,3),\cdots(n-2,n-1)$

$\cdots$

$(1,2),(2,3)$

$(1,2)$

以上称为一个前向扫描(forward sweep)

同样主元列

$(n-1,n),(n-2,n-1),\cdots(2,3),(1,2)$

$(n-1,n),(n-2,n-1),\cdots(2,3)$

$\cdots$

$(n-1,n),(n-2,n-1)$

$(n-1,n)$

被定义为是一个后向扫描(backward sweep),而将进行完一次前向扫描后再紧接着进行一次后向扫描,称为是一个双扫描(double sweep),扫描过程中的 schur 旋转全都采用外旋转,算法的并行实施的详细组织细节可见文献[18][19]。

P.J.Eberlein 提出的方法本质上也是 Jacobi 型的,她的方法的实施是在 $N\times N$ 网格状连结的处理机机型上,$N = n/2$,它的做法不同于 Stewart 的,主元的选取可离开次对角线,并且 Schur 旋转中的两个可能的旋转皆被应用(针对不同的情况)。在对旋转常数的选择上,P.J.Eberlein 作了重点的讨论[20]。算法的本质是主元的选择和旋转常数的选择,关于主元的选择,P.J.Eberlein 引入了两种不同的映射,

即　$1\to1, 2\to4, 4\to6, \cdots n\to n-1$

　　$n-1\to n-3, \cdots 7\to5, 5\to3, 3\to2$

和　$1\to1, 2\to n, n\to n-1, n-1\to n-2, \cdots 6\to5$

　　$5\to4, 4\to3, 3\to2$

其中的起始主元对为:$(1,2),(3,4),\cdots(n-1,n)$

关于旋转常数的选择,P.J.Eberlein 引入如下的方法:

如果$|a_{mk}|\leq eps$,则旋转被滑过

如果$|a_{mk}| > eps$,则:

(1)如果 $k=m-1$ 且 $\mathrm{Real}(a_{kk}-d_{max})>\alpha_1\,\mathrm{real}(a_{mm}+d_{max})$，$|\mathrm{real}(a_{kk}-d_{max})-\mathrm{real}(a_{kk}+d_{max})|>\alpha_2 n$，则用 t_1 来调序对角元，否则选用 t_s 执行 3。

(2)如果 $k\neq m-1$，则选用 t_s 再执行 3。

(3)如果从 1 和 2 发现 $t_s\geqslant\alpha_3(\alpha_3<1)$，则让 $\mathrm{tg}\,2x=t_s$ 并求出 $\mathrm{tg}\,x$，θ 不变。

(4)若 t_s 不定，则当 $d_{max}=0$ 时，让 $t=1,\theta=0$；

当 $d_{max}\neq 0$ 时 $a_{km}=0$ 用 t_s 选择 t_1。

详细的并行组织细节可参阅文献[20]。

P.J.Eberlein 的算法对与正规阵有一定距离的矩阵总体来说收敛效果尚令人满意，不过对算法的收敛法的证明显然不易做到。

2.2.2 广义特征值问题

对广义特征值问题：$AX=\lambda BX$（A、B 为 n 阶复矩阵）的并行计算，就非对称情形而言，目前国内外研究得尚少，J.P.Charlier 和 P.Van.Dooren1989 年给出了拟-Jacobi 方法在网格状连结 $N\times N$ 多处理机系统上的并行实现[23]，他们的方法扫描所需的时间为 $0(n)$，在某种假定下他们给出了一个总体收敛的说明，他们的方法以 G.W.Stewart 85 年的方法为基础，然而当问题不接近于正规时收敛速度是很慢的，并且一般当问题的维数超过 20 时，方法一般都不收敛，Wen-Wei Lin 和 C.W.Chen 1991 年给出一个 3 次修正方案来讨论拟-Jacobi 方法计算非对称情形 $AX=\lambda BX$ 的特征值时的加速问题[24]，这个修正方案一般在拟-Jacobi 过程以后，当矩阵对(A,B)的严格下三角矩阵变得非常小的时候应用可加速收敛的速度，他们的方法在 $N\times N$ 方阵网状连结的多处理机上实现的时间为 $0(n)$，不过他们方法实施的先决条件是矩阵的特征值必须是区分的，这类同于 1986 年 Davies 等人处理标准特征值问题加速时的情形。在国内，周树荃和笔者等人研究了非对称广义特征值问题的并行 QZ 算法[30]，并行拟-Eberlein[31]，并行连续同伦算法[32]，并行同伦-行列式算法[33]。以上算法都是在具有共享存储的多处理机系统上实现的。其中的并行拟-Eberlein 算法本质上也是 Jacobi 型方法。

3 $N\times N$ 网格状多处理机系统中拟-Jacobi 的并行实施

前文中曾介绍了并行求解非 Hermite 矩阵标准特征值的 P.J.Eberlein 方法，本节中我们以 P.J.Eberlein 的工作为基础，针对网格状分布式多处理机系统设计出一种非对称广义特征值问题的拟-Jacobi 方法的并行处理方案，具体内容分以下 3 个部分，可预先假定矩阵阶数 n 为偶数，若为奇数，则通过加零行零列的方法使 n 变成偶数，并设定 $n=2N$。

3.1 主元的选择

第一步为(1,2)，(3,4)，…$(n-1,n)$以下的选取按映射 $1\to1,2\to4,4\to6,\cdots n\to n-1,n-1\to n-3,\cdots,7\to5,5\to3,3\to2$ 来组织。

以 $n=8$ 为例，主元的选取分为 $n-1=8-1=7$ 类

0	(1 2)	(3 4)	(5 6)	(7 8)
1	(1 4)	(2 6)	(3 8)	(5 7)
2	(1 6)	(4 8)	(2 7)	(3 5)
3	(1 8)	(6 7)	(4 5)	(2 3)
4	(1 7)	(8 5)	(6 3)	(4 2)
5	(1 5)	(7 3)	(8 2)	(6 4)
6	(1 3)	(5 2)	(7 4)	(8 6)

每一类对应一个时间区间。

3.2 广义 Schur 旋转的计算

广义 Schur 旋转的计算请参看笔者等人在文献[31]中的工作。

3.3 旋转常数的散播

在每个处理器 P_{kl} 起始时都存有 2×2 子矩阵，

$$\begin{array}{cc} L_{kl} & K_{kl} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} X_{2k-1,2l-1} & X_{2k-1,2l} \\ X_{2k,2l-1} & X_{2k,2l} \end{pmatrix}$$

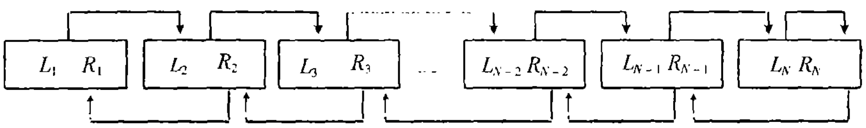
其中 X 代表 A.B、U.V 的相应位置的元素,在一个时间区间内每个对角处理机同时被用来计算广义 Schur 旋转(Q,Z)中的常数[31],而当这些常数计算出来以后,则按其所在的行和列进行传播,以便实施下面的运算:

$$Q=\begin{pmatrix} p & -\bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix} \qquad Z=\begin{pmatrix} c & -\bar{s} \\ s & \bar{c} \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{rs}=a_{rs}\ r.s=1,2\cdots n,\qquad r.s\neq k.l$$
$$\hat{a}_{kr}=ca_{kr}+\bar{s}a_{lr},\ \hat{a}_{lr}=-sa_{kr}+ca_{lr}\quad r\neq k.l$$
$$\hat{a}_{rk}=pa_{rk}+qa_{rl},\ \hat{a}_{rl}=-\bar{q}a_{rk}+pa_{rl}\quad r\neq k.l$$
$$\hat{a}_{kk}=pca_{kk}+p\bar{s}a_{lk}+qca_{kl}+q\bar{s}a_{ll}$$
$$\hat{a}_{ll}=q\bar{s}a_{kk}-\bar{q}sa_{lk}-pca_{kl}+pca_{ll}$$
$$\hat{a}_{kl}=-\bar{q}ca_{kk}-\bar{q}\bar{s}a_{lk}+pca_{kl}+p\bar{s}a_{ll}$$
$$\hat{a}_{lk}=0$$

当以上过程全部完成以后,表明一个时间区间步已完成,各处理机依据下列方法交换它们的行数据(列数据同样),然后再进行下一个时间区间步过程。

$$N=\frac{n}{2}$$



4　G.W.Stewart 算法的修正

在2.2.1中曾介绍了非 Hermite 矩阵标准特征值的 G.W.Stewart 算法[19],G.W.Stewart 的算法期望在每次扫描后矩阵的严格下三角部分中的较大元素能够向次对角线迁移。数值试验结果表明对于近乎正规矩阵或近似 H 阵,此算法是令人满意的,但对强非 H 阵或强非正规阵收敛速度很慢,换言之,G.W. Stewart 的构想(下三角部分中的大元向次对角线迁移)并不总能实现而且对一般非 H 阵一般都不能实现。为此本节应用'阈策略'来修正 G.W.Stewart 的算法。先证明下面的结果。

定理:对矩阵 A,引入 $SSAV(A)=\sum\limits_{l>j}|a_{ij}|^2$,则可适当选取矩阵 U,使得 $SSAV(A')\leqslant SSAV(A)$,其中 $A'=U^*AU$。

证明:$\begin{pmatrix} \cos x & e^{i\theta}\sin x \\ -e^{-i\theta}\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{kk} & a_{km} \\ a_{mk} & a_{mm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos x & -e^{i\theta}\sin x \\ e^{-i\theta}\sin x & \cos x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{kk}' & a_{km}' \\ a_{mk}' & a_{mm}' \end{pmatrix}$

对 A 的相应的酉相似变换阵为 U,其中 $U(i,i)=1,i\neq k,m,U(i,i)=\cos x,i=k,m,U(i,j)=-U^*(j,i)=-e^{-i\theta}\sin x,i=k,j=m,U(i,j)=0,i,j=$其它。

并令$\cos x=c,\sin x=s$,则 $A'=U^*AU$ 中的元素有:

$$a_{ki}'=ca_{ki}+e^{i\theta}sa_{mi},\quad a_{ik}'=ca_{ik}+e^{-i\theta}sa_{im}$$
$$a_{mi}'=-e^{-i\theta}sa_{ki}+ca_{mi},\quad a_{im}'=-e^{i\theta}sa_{ik}+ca_{im}$$

其中 $i=1,2,\cdots n,i\neq k,m$

$$a_{mk}'=c^2e^{-i\theta}[-t(a_{kk}-a_{mm})+e^{i\theta}a_{mk}-t^2e^{-i\theta}a_{km}],t=c/s=\text{tg}\ x$$

$$\triangle = SSAV(A') - SSAV(A) = \sum_{i>j} |a_{ij}'|^2 - \sum_{i>j} |a_{ij}|^2 = \sum_{i=k}^{m-1} |a_{mi}'|^2 - \sum_{i=k}^{m-1} |a_{mi}|^2 + \sum_{i=k+1}^{m} |a_{ik}'|^2 - \sum_{i=k+1}^{m} |a_{ik}|^2$$

对 $m = k+1, \triangle = 2|a_{mk}'|^2 - 2|a_{mk}|^2 = -2|a_{mk}|^2 \leqslant 0$

对 $m > k+1$,

$$\triangle = 2(|a_{mk}'|^2 - |a_{mk}|^2) + \sum_{i=k+1}^{m-1} |a_{mi}'|^2 - \sum_{i=k+1}^{m-1} |a_{mi}|^2 + \sum_{i=k+1}^{m-1} |a_{ik}'|^2 - \sum_{i=k+1}^{m-1} |a_{ik}'|^2 =$$

$$2(|a_{mk}'|^2 - |a_{mk}|^2) + 2scR_e\{e^{-i\theta} \sum_{i=k+1}^{m-1} [a_{ik}\bar{a}_{im} - a_{ki}\bar{a}_{mi}]\} - s^2\{\sum_{i=k+1}^{m-1} [a_{mi}|^2 + |a_{ik}|^2 - |a_{ki}|^2 - |a_{im}|^2]\}$$

$$a_{mk}' = -e^{-i\theta} cs(a_{kk} - a_{mm}) + a_{mk} - s^2 e^{-i\theta}(e^{-i\theta} a_{km} + e^{i\theta} a_{mk})$$

令 $D_{km} = a_{kk} - a_{mm}$, $\S_{km} = e^{-i\theta} a_{km} + e^{i\theta} a_{mk}$

$$|a_{mk}'|^2 = -s^2 |c\S_{km} - sD_{km}|^2 + s^2 |D_{km}|^2 + s^2 |\S_{km}|^2 - 2csR_e[e^{-i\theta} D_{km}\bar{a}_{mk}] - 2s^2 R_e[e^{i\theta} a_{mk} \S_{km}] + |a_{mk}|^2$$

$$|a_{mk}'|^2 - |a_{mk}|^2 \leqslant s^2 |D_{km}|^2 + s^2 |\S_{km}|^2 - 2csR_e[e^{-i\theta} D_{km}\bar{a}_{mk}] - 2s^2 R_e[e^{i\theta} a_{km} \overline{\S}_{km}]$$

再令 $H = R_e[e^{-i\theta} D_{km}\bar{a}_{mk}]$ $L = R_e[e^{i\theta} a_{mk} \overline{\S}_{km}]$

$$M = R_e\{e^{-i\theta} \sum_{i=k+1}^{m-1} [a_{ik}\bar{a}_{im} - a_{ki}\bar{a}_{mi}]\}$$

$$N = \sum_{i=k+1}^{m-1} [|a_{mi}|^2 + |a_{ik}|^2 - |a_{ki}|^2 - |a_{im}|^2]$$

于是 $\triangle \leqslant 2cs(M - 2H) - s^2(N + 2L - |D_{km}|^2 - |\S_{km}|^2) = s^2[\mathrm{ctg}(2M - 4H) - (N + 2L - |D_{km}|^2 - |\S_{km}|^2)]$

$\cot\ x = c/s$ 适当选取 x,总能使 $\triangle \leqslant 0$,由此得证。

修正 G.W.Stewart 算法

让 $eps \in R^+$(压缩界)

(1)执行双扫描 $A \to A'$(见 G.W.Stewart 算法)

(2)计算 $\max_{i>j} |a_{ij}'|$,若 $\max_{i>j} |a_{ij}'| \leqslant eps$,则算法完成,若 $\max_{i>j} |a_{ij}'| > eps$,则选取酉相似变换 $U^* A'U \to A''$,使 $SSAV(A'') \leqslant SSAV(A')$,然后回到 1。

参 考 文 献

1 C.G.J.Jacobi.Über ein leichtes verfahren,die in der Theorie der säkularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen [J]. JKeine Ayew,Math. 1846,30:51~95.

2 J.Greenstadt. A method for finding roots of arbitrary matries[J].MTAC,1955,9(50):47~52.

3 R.Causey. Computing eigenvalues of nonhermitian matrix by the method of Jacobi[J].SIAM.App.Math.1962,4:187~195.

4 J.Greenstadt. Some numerical experiments in triangularizing matrices[J].Numer.Math.1962,4:187~195.

5 P.J.Eberlein. A Jacobi-like method for the automatic computation of eigenvalues and eigenvectors of an arbitrary matrix[J].Soc.Indust. Appl. Math.1962,10:74~88.

6 H.H.Goldstein.A footnote to a recent paper[J].Ass. Comput. Math. 7:78~79.

7 P.J.Eberlein,J.Boothroyd. Solution to the eigenproblem by a norm reducing Jacobi type method[J]. Numer. Math.1968,11:1~12.

8 G.E.Forrythe,P.Henrici. The cyclic Jacobi method for computing the principcal values of a complex matrix[J]. Trans. Amer. Math. Soc.1960,94:1~23.

9 C.P.Huang. A Jacobi-type method for triangularzing an arbitray matrix[J].SIAM.Num.Anal.1975,12:561~570.

10 W.Bernhard. Illiac Iv codes for Jacobi and Jacobi-like algorithms[R]. A forth coming center for advanced computation document, university of Illinois, Urbara,Illinois.

11 A.H.Sameh.On Jacobi and Jacobi-like algorithms for a parallel computer[J].Math.Comp.1971,25(115):579~590.

12 J.J.Modi,et al.Efficient implementation of Jacobi's diagonalization method on the DAP[J]. Numer. Math.1985,46:443~454.

13 R.P.Brent,F.T.Luk. The solution of singlar value and symmetric eigenvalue problens on multiprocessor systens[J]. SIAM.Sci.

Static. Comput. 1985, 6: 69 ~ 84.

14 R. A. Whiteside, et al. A parallel Jacobi diagonalization algorithms for a loop multiprocessor system[J]. IEEE. Trans. Comp. 1984, C-33(5): 409 ~ 413.

15 P. J. Eberlein. On one-sided Jacobi methods for parallel computation[J]. SIAM. Alg. Disc. Meth. 1987, 8(4): 790 ~ 796.

16 M. Berry, et al. Multiprocessor Jacobi algorithms for dense symmetric eigenvalue and singlarvalue decompositions[C]. Proce. 86 th. Internat. Conference on parallel processing, 433 ~ 440.

17 J. J. Modi, D. Parkdon. Study of Jacobi methods for eigenvalue and SVD on DAP[C]. Conf. Proc. Computer physics communications, 1982, 26: 317 ~ 320.

18 D. P. O'leary, G. W. Stewart. Data-flow algorithms for parallel matrix computations[R]. Computer science, Tech. Rep, 1366, Univ. Maryland, College, Park 1984.

19 G. W. Stewart. A Jacobi-like algorithm for computing the schur decomposition of a nonhermitian matrix[J]. SIAM. Sci. Static. Comput. 1985, 6: 853 ~ 864.

20 P. J. Eberlein. On the schur decomposition of a matrix for parallel computation, IEEE[J]. Trans. Comp. 1987, C-36(2): 167 ~ 174.

21 R. O. Davies, J. J. Modi. A direct method for completing eigenproblem solution on a parallel computer[J]. Lin. Alg. and it's Appl. 1986, 77: 61 ~ 74.

22 J. J. Modi, R. O. Davies, D. Parkison. Extension of parallel Jacobi method to the generalized eigenvalue problem[C]. In Parallel Computing 83, North-Holland, Amsterdam, 1986, 191 ~ 197.

23 J. P. Charlier, P. Van. Dooren. Jacobi-like algorithm for computing the generalized schur form of a regular pencil[J]. Comp. and Appl. Math. 1989, 27: 17 ~ 36.

24 Wen-Wei Lin, C. W. Chen. An acceleration method for computing the generalized eigenvalue problem on a parrallel computer[J]. Lin. Alg. and it's Appl. 1991, 146: 49 ~ 65.

25 V. Hari. On the convergence of cyclic Jacobi-like processes[J]. Lin. Alg. ad it's Appl. 1986, 81: 105 ~ 127.

26 M. H. C. Paardekooper. Aquadratically convergent parallel Jacobi process for diagorally dominant matries with distinct eigenvalues [J]. Comp. Appl. Math. 1989, 27: 3 ~ 16.

27 F. T. Luk, H. Park. On parallel Jacobi orderings[J]. SIAM. Sci. Stat. Comp. 1989, 10(1): 18 ~ 26.

28 M. Mantharam, P. J. Eberlein. New Jacobi-sets for parallel computations[J]. Parallel Computing, 1993, 19: 437 ~ 454.

29 M. Mantharam, P. J. Eberlein. Block recursive algorithm to generate Jacobi-sets[J]. Parallel Computing 1993, 19: 481 ~ 496.

30 薛长峰. 非对称广义特征值问题的并行 QZ 算法[J]. 盐城工学院学报, 1997, 10(1): 9 ~ 13.

31 薛长峰, 周树荃. 非对称广义特征值问题的拟-Eberlein 算法及其并行化[J]. 南京航空航天大学学报, 1999, 31(4): 422 ~ 427.

32 薛长峰, 周树荃. 非对称广义特征值问题的并行连续同伦算法[J]. 计算物理, 1997, 14(4 ~ 5): 619 ~ 621.

33 薛长峰, 周树荃. 非对称广义特征值问题的并行同伦-行列式算法[J]. 数值计算与计算机应用, 1999, 20(3): 161 ~ 166.

34 周树荃, 邓绍忠. 有限元结构分析并行计算的若干研究进展[J]. 南京航空航天大学学报, 1995, 27(1): 27 ~ 32.

Some researches on Jacobi-type method

Xue Changfeng

(Department of Basic Science of Yancheng

Institute of Technology, Jiangsu Yancheng　224003, PRC)

Abstract　It is recalled the development history of Jacobi method and Jaobi-like method, Introduced the present researches of parallel Jacobi method and parallel Jacobi-like method. And designed the parallel processing plan of a kind Jacobi-like method for nonsymmetric generalized eigenvalue on system of square array of mesh-connected multiprocessors, while remade the G. W. Stewart's algorithm.

Keywords　Jacobi method;　Jacobi-like method;　Nonsymmetric generalized eigenvalue;　Parallel computation