第 13 卷 第 1 期　　盐城工学院学报　　Vol. 13 No. 1
2000 年 3 月　　Journal of Yancheng Institute of Technology　　Mar. 2000

交错级数敛散性的一个判别定理*

骆汝九
(连云港职业技术学院,江苏 连云港 222001)

摘　要　提出了交错级数敛散性的一个新的判别定理。该定理的判别式为极限形式,运用其判别交错级数的敛散性非常简便。

关键词　交错级数;　敛散性;　判别定理
分类号　O173.1　　**文献标识码**　C　　**文章编号**　1008-5092(2000)01-0073-02

在数学分析教材中,有关交错级数

$$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \quad (a_n > 0) \tag{A}$$

和正项级数

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}a_n \quad (a_n > 0) \tag{B}$$

的讨论很多,基本的定理有以下两个。

定理 1[1](莱布尼兹审敛法)对于交错级数(A),若满足条件:

(1)　$a_n \geqslant a_{n+1}$　$(n = 1,2,3\cdots)$

(2)　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

则交错级数(∗)收敛。

定理 2[1](拉阿伯审敛法)对于正项级数(B),若

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$$

则　(1)　当 $r > 1$ 时,级数(B)收敛;

(2)　当 $r < 1$ 时,级数(B)发散;

(3)　当 $r = 1$ 时,级数(B)可能收敛也可能发散。

本文是作者结合定理 1、定理 2 提出的交错级数的一个判别定理。

1　定理

1.1　定理的提出

对于交错级数(A),若

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$$

则　(1)　当 $r > 0$ 时,级数(A)收敛;特别地:当 $0 < r < 1$ 时,级数(A)条件收敛;当 $r > 1$ 时,级数(A)绝对收敛;

(2)　当 $r < 0$ 时,级数(A)发散;

* 收稿日期:1999 - 09 - 09
作者简介:骆汝九(1967-),男,江苏射阳县人,讲师,硕士研究生,从事组合数学研究。

(3) 当 $r=0$ 时,级数(A)可能收敛也可能发散。

1.2 问题的证明

(1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=r>0$,所以当 n 充分大时,$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)>0$,即 $a_n>a_{n+1}$。

记 $\alpha=\frac{r}{2}$,存在 N,当 $n\geqslant N$ 时,$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)>\alpha$,即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{n}{n+a}$,于是

$$0<\frac{a_{N+m+1}}{a_N}<\frac{N(N+1)\cdots(N+m)}{(N+\alpha)(N+\alpha+1)\cdots(N+\alpha+m)} \tag{C}$$

记 $P_m=\frac{N+m}{N+\alpha+m}$,则 $b_m=P_m-1=\frac{N+m}{N+\alpha+m}-1=(1+\frac{N}{m})(1+\frac{N+\alpha}{m})^{-1}-1=(1+\frac{N}{m})[1-\frac{N+\alpha}{m}+(\frac{1}{m^2})]-1=[1-\frac{\alpha}{m}+(\frac{1}{m^2})]-1=-\frac{\alpha}{m}+(\frac{1}{m^2})$

当 m 适当大时,b_m 保持定号。

因为 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$ 收敛,$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha}{m}$ 发散,所以 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}b_m$ 发散。因此,无穷乘积 $\prod\limits_{m=0}^{\infty}\frac{N+m}{N+\alpha+m}$ 发散。又部分乘积 $\prod\limits_{k=0}^{m}P_k$ 递减且为正,所以无穷乘积 $\prod\limits_{m=0}^{\infty}\frac{N+m}{N+\alpha+m}$ 发散于零,即

$$\lim_{m\to\infty}\frac{N(N+1)\cdots(N+m)}{(N+\alpha)(N+\alpha+1)\cdots(N+\alpha+m)}=0$$

由(C)式,得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

满足莱布尼兹审敛法的两个条件,由引理 1,级数(A)收敛。

由引理 2,进一步可得:

当 $0<r<1$ 时,级数(A)条件收敛;

当 $r>1$ 时,级数(A)绝对收敛。

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=r<0$,故当 n 充分大时,$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)<0$,即 $0<a_n<a_{n+1}$,于是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$,从而级数(1)发散。

(3) 当 $r=\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=0$ 时,级数(*)可能收敛也可能发散。

如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln n}$ 收敛;$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{n})$ 发散。

注 1 对于定理的结论(1)"当 $r>0$ 时,级数(1)收 敛。"文献[2]给出的证法(2674 题)难度很大(先后利用了第 143、146、2606 题的结论)。本文在一般数学分析教材所讲述的基本知识范围内,给出了上面的简捷证法。在此基础上,将上述定理作为交错级数的一个审敛法而加以引入和运用是可行的。

注 2 从定理的结论(1)的证明过程可以看出,如果 $r=\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)>0$,则交错级数(1)一定是莱布尼兹型的,从理论上讲,此时一定可以用莱布尼兹审敛法(引理 1)判别其收敛,但有时验证级数(1)满足引理 1 的两个条件是困难的,而运用上述定理判别级数(1)的敛散性却非常简便(参见例 2)。由此可见,上述定理作为交错级数的一个审敛法所起的作用是莱布尼兹审敛法所不可替代的。

2 定理的应用

例 1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

解:构造交错级数:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

因为 $r=\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{(2n-1)!!\ /(2n)!!}{(2n+1)!!\ /(2n+2)!!}-1)=\frac{1}{2}>0$

故交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$收敛。

于是$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=0$

例2　判别交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{b(b+d)\cdots[b+(n-1)d]}$　$(a>0,b>0,d>0)$的敛散性。

解：$r=\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)n}{a+nd}=\frac{b-a}{d}$

由定理可得：

当$0<\frac{b-a}{d}<1$，即$a<b<a+d$时，原级数条件收敛；

当$\frac{b-a}{d}>1$，即$b>a+d$时，原级数绝对收敛；

当$\frac{b-a}{d}=1$，即$b=a+d$时，原级数收敛。此时，原级数即为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a}{a+nd}$，故条件收敛；

当$\frac{b-a}{d}<0$，即$b<a$时，原级数发散；

当$\frac{b-a}{d}=0$，即$b=a$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$，发散。

综上所述，原级数

当$b\leqslant a$时，发散；

当$a<b\leqslant a+d$时，条件收敛；

当$b>a+d$时，绝对收敛。

上述例子表明本文所给出的新的判别定理，对某些级数应用起来显得很方便。

参　考　文　献

1　华东师范大学数学系.数学分析[M].北京：高等教育出版社，1980.
2　吉米多维奇.数学分析习题集题解(四)[M].费定晖，周学圣编译.济南：山东科学技术出版社，1980.

A Criterion for Convergence of Alternate Series

Luo Rujiu
(Lianyungang Vocational College, Jiangsu Lianyungang　222001, PRC)

Abstract　In this paper, we present a new sometimes very effective, criterion for convergence of alternate series.

Keywords　alternate series;　convergence;　criterion;　theorem

(上接第70页)

A Narrow Analysis about Firewall

Chen Shulin
(Yancheng building commision of the city and countryside, Jiangsu Yancheng　224001, PRC)

Abstract　Firewall is a safety screen setting between the inter Net and the unsafety Net Through the introduction of the use and system constitution of the Firewall, and how to choose it according to the actialities, people can know more about this new knowledge-Firewall.

Keywords　Net;　Firewall;　INTERNET