第 13 卷 第 2 期 盐城工学院学报 Vol.13 No.2
2000 年 6 月 Journal of Yancheng Institute of Technology Jun.2000

关于矩阵方根的一个结果*

洪 虹
(盐城市机械工业局,江苏 盐城 224003)

摘 要 讨论了一类可对角化矩阵,得出其 n 次方根矩阵的存在与唯一性,并例示了在使用该结果解决正定矩阵时的优越性。

关键词 矩阵的 n 次方根; 可对角化矩阵; 方阵的特征值

分类号 O151 **文献标识码** A **文章编号** 1008-5092(2000)02-0060-02

设 n 为自然数,A、B 为数矩阵,若 $A^n=B$,称 A 为 B 的 n 次方阵,当 A 是可对角化且特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m$ 均为非负实数的实 m 阶方阵,则存在 m 阶可逆矩阵 P,使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},\text{即 } A=P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}, \tag{1}$$

成立,于是,有

$$A=P\begin{bmatrix}\lambda_1^{\frac{1}{n}} & & & \\ & \lambda_2^{\frac{1}{n}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m^{\frac{1}{n}}\end{bmatrix}p^{-1}P\begin{bmatrix}\lambda_1^{\frac{1}{n}} & & & \\ & \lambda_2^{\frac{1}{n}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m^{\frac{1}{n}}\end{bmatrix}p^{-1}\cdots P\begin{bmatrix}\lambda_1^{\frac{1}{n}} & & & \\ & \lambda_2^{\frac{1}{n}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m^{\frac{1}{n}}\end{bmatrix}p^{-1}=B^n, \tag{2}$$

其中,

$$B=P\begin{bmatrix}\lambda_1^{\frac{1}{n}} & & & \\ & \lambda_2^{\frac{1}{n}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m^{\frac{1}{n}}\end{bmatrix}P^{-1}(n\in N,n\geqslant 2)$$

现在,我们来证明(2)中 B 的唯一性,这就是:

定理:设 A 是有非负实特征根 $\lambda_i(i=1,2,\cdots m)$ 的可对角化的 m 阶实方阵,则对满足(1)中的任何 m 阶可逆阵 P,(2)中的 B 是唯一的。

证明:不妨设 A 的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 中所有不同的特征根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l(1\leqslant l\leqslant m)$,则 $\lambda_1^{\frac{1}{n}},\lambda_2^{\frac{1}{n}},\cdots\cdots,\lambda_m^{\frac{1}{n}}$ 中,有且仅有 l 个不同的值,$\lambda_1^{\frac{1}{n}},\lambda_2^{\frac{1}{n}},\cdots\cdots\lambda_l^{\frac{1}{n}}$。作辅助函数:

$$f(\lambda)=\sum_{i=1}^{l}\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_{i-1})(\lambda-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda-\lambda_l)\cdot\lambda_i^{\frac{1}{n}}}{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i-\lambda_l)}$$

则 $f(\lambda)$ 是一个 $t-1$ 次多项式,且 $a_i^{\frac{1}{n}}=f(\lambda_i)(i=1,2,\cdots,l)$,故满足(1)中的可逆矩阵 P,恒有

$$B=P\begin{bmatrix}\lambda_1^{\frac{1}{n}} & & & \\ & \lambda_2^{\frac{1}{n}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m^{\frac{1}{n}}\end{bmatrix}P^{-1}=P\begin{bmatrix}f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_m)\end{bmatrix}P^{-1}=$$

* 收稿日期:1999-12-07
作者简介:洪 虹(1965-),女,讲师。

$$Pf(\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m\end{bmatrix})P^{-1} = f(P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m\end{bmatrix}P^{-1}),$$

这说明 B 是由 A 唯一确定的。

由该定理可知，B 是由 A 唯一的确定的，我们把 B 记作 $A^{\frac{1}{n}}$，称之为满足定理条件的矩阵 A 的 n 次方根矩阵。

综上所述，我们对有特征根非负的可对角化矩阵 A，有

推论 1　$B^n = (A^{\frac{1}{n}})^n = A(n\in \mathrm{N}, n\geqslant 2)$恒成立。

特别地，对幂等矩阵 $A(A^2=A)$，可对角化的幂零矩阵 $A(\exists R\in \mathrm{N}, k\geqslant 2$，使 $A^k=0)$及其正(半正)定矩阵 A，有

推论 2　$B^n = (A^{\frac{1}{n}})^n = A(n\in \mathrm{N}, n\geqslant 2)$成立。

应当指出，对正定阵 A，显然，$A^{\frac{1}{n}}$ 为正定阵，进而$(A^{\frac{1}{n}})^{-1}$也正定，且有$(A^{\frac{1}{n}})^{-1}(A^{\frac{1}{n}})=\mathrm{I}$，$[(A^{\frac{1}{n}})^{-1}]^n = [(A^{\frac{1}{n}})^n]^{-1} = A^{-1}(n\in \mathrm{N}, n\geqslant 2)$成立。这些等式在解决正定阵时常常带来方便。限于篇幅下面仅举一例说明其应用，读者不难举一而反三。

例：　假设 A 是 m 阶实满秩矩阵，求证：存在正交阵 P_1 及 P_2，使得

$$P_1AP_2 = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m\end{bmatrix} \text{且} \lambda_i > 0(i = 1,2,\cdots\cdots,m)$$

证明：　由 A 为满秩矩阵知，存在 m 阶非奇异方阵 P、Q，使得 $PAQ=\mathrm{I}$，即 $A=P^{-1}Q^{-1}$，于是 $A'A = (P^{-1}Q^{-1})'(P^{-1}Q^{-1}) = [(QP)']^{-1}\cdot(QP)^{-1}$，故 $A'A$ 是正定阵，从而 $A'A=(A'A)^{\frac{1}{2}}(A'A)^{\frac{1}{2}}$，且$(A'A)^{\frac{1}{2}}$也正定。由此得到

$$A = [(A')^{-1}(A'A)^{\frac{1}{2}}]\cdot(A'A)^{\frac{1}{2}},$$

记 $\mathrm{U}=(A')^{-1}(A'A)^{\frac{1}{2}}$，

于是，$\mathrm{UU}' = [(A')^{-1}(A'A)^{\frac{1}{2}}]\cdot[(A')^{-1}(A'A)^{\frac{1}{2}}]' = (A')^{-1}(A'A)^{\frac{1}{2}}[(A'A)^{\frac{1}{2}}]'\cdot A^{-1} = (A')^{-1}\cdot(A'A)^{\frac{1}{2}}\cdot(A'A)^{\frac{1}{2}}\cdot A^{-1} = (A')^{-1}\cdot A'AA^{-1} = \mathrm{I}$。

因而，U 是正交阵，又对正定阵$(A'A)^{\frac{1}{2}}$存在正交阵 P_2，使得

$$P_2'(A'A)^{\frac{1}{2}}P_2 = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m\end{bmatrix},$$

其中，λ_i 是正定阵$(A'A)^{\frac{1}{2}}$的特征根，从而 $\lambda_i>0$，$(i=1,2,\cdots,m)$，故有

$$A = [(A')^{-1}(A'A)^{\frac{1}{2}}](A'A)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{U}(A'A)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{U}P_2\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m\end{bmatrix}P_2',$$

记 $\mathrm{U}P_2=P_1$，显然，P_1 为正交阵，于是

$$P_1'AP_2 = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m\end{bmatrix}, \text{且} \lambda_i > 0(i = 1,2,\cdots\cdots,m)。$$

参 考 文 献

1　谢邦杰.线性代数[M].长春:吉林大学出版社,1988.

Existence and Uniqueness of n-Th Roots of A Class of the Diagnolablf Matrix

Hong Hong

(The Industrial Bureau of Yancheng City, Jiangsu Yancheng 224002, PRC)

Abstract This paper deals with the kind of the diagnolable matrix and has got the existence and unigueness of n-th roots, and illustrates the result that it is helpful to solve the positire definite matrix by example.

Keywords existence and unigueness; n-th roots matrix; diagnolable matrix

声 明

为适应我国学术期刊文献数字化和信息化建设的需要,扩大作者学术交流渠道,促进科技成果的迅速转化,我院《学报》已加入《中国学术期刊(光盘版)》,并成为其全文收录期刊。凡向本《学报》所投稿件,均视为愿意加入《中国学术期刊(光盘版)》,其作者著作权使用费由我院学报编辑部一次性所发稿酬所给付。若有作者不同意将其论文编入该数据库,请在来稿时申明,本刊将做适当处理。

盐城工学院学报编辑部