

全对称 Jacobi 矩阵的逆特征值问题*

孔翠芳

(盐城工学院 基础部, 江苏 盐城 224003)

摘 要:提出关于全对称 Jacobi 矩阵的一类逆特征值问题。导出了该问题有唯一解的一个充分条件;在条件满足时给出了计算公式。

关键词:反问题;特征值;Jacobi 矩阵

中图分类号: O24

文献标识码: A

文章编号: 1008-5092(2000)04-0001-03

0 引言

振动工程中弹簧——质量系统等振动结构参数识别问题等往往归结为 Jacobi 矩阵逆特征值问题。

所谓全对称 Jacobi 矩阵 $J_n^{(s)}$ 是指如下形状的实对称矩阵。

$$J_n^{(s)} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & \\ b_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \quad a_i = a_{n+1-i}, b_i = b_{n-i} > 0 (i = 1, \dots, [\frac{n}{2}]) \quad (1)$$

设

$$J_{n-2}^{(s)} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & & \\ b_2 & a_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-2} \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

本文讨论如下问题:

问题 JS 给定 $(\lambda, x), (\mu, y), \lambda, \mu \in R, x \in R^n, y \in R^{n-2}, \beta > 0$, 构造 $J_n^{(s)}$, 使 $\prod_{i=1}^{n-1} b_i = \beta, (\lambda, x), (\mu, y)$ 分别是 $J_n^{(s)}, J_{n-2}^{(s)}$ 的特征对, 即有

$$J_n^{(s)} x = \lambda x, J_{n-2}^{(s)} y = \mu y \quad (3)$$

1 有关知识

$S_k = (e_k, e_{k-1}, \dots, e_1)$ (其中 $e_i (i = 1, \dots, k)$ 表示 k 阶单位阵 I_k 的第 i 列)。当 $n = 2k$ 时, $J_n^{(s)}, J_{n-2}^{(s)}$ 可表成

$$J_n^{(s)} = \begin{pmatrix} J_k & b_k e_k e_1^T \\ b_k e_1 e_k^T & S_k J_k S_k^T \end{pmatrix}, \text{ 其中 } J_k = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & \\ b_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{k-1} \\ & & b_{k-1} & a_k \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$J_{n-2}^{(s)} = \begin{pmatrix} J_{k-1} & b_k e_{k-1} e_1^T \\ b_k e_1 e_{k-1}^T & S_{k-1} J_{k-1} S_{k-1}^T \end{pmatrix}, \text{ 其中 } J_{k-1} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & & \\ b_2 & a_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{k-1} \\ & & b_{k-1} & a_k \end{pmatrix} \quad (5)$$

当 $n = 2k + 1$ 时, $J_n^{(s)}, J_{n-2}^{(s)}$ 可表成

* 收稿日期: 2000-09-14

作者简介: 孔翠芳(1967-), 女, 江苏阜宁县人, 盐城工学院讲师, 硕士。

$$J_n^{(s)} = \begin{pmatrix} J_k & b_k e_k & 0 \\ b_k e_k^T & a_{k+1} & b_k e_1^T \\ 0 & b_k e_1 & S_k J_k S_k \end{pmatrix}, J_{n-2}^{(s)} = \begin{pmatrix} J_{k-1} & b_k e_{k-1} & 0 \\ b_k e_{k-1}^T & a_{k+1} & b_k e_1^T \\ 0 & b_k e_1 & S_{k-1} J_{k-1} S_{k-1} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\text{设 } x = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^T, y = (\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_{n-1})^T \quad (7)$$

$$D_i = \begin{vmatrix} \zeta_i & \zeta_{i+1} \\ \eta_i & \eta_{i+1} \end{vmatrix}, (i = 1, \dots, k), d_i = \sum_{j=1}^i \zeta_j \eta_j (i = 1, \dots, n) \quad (8)$$

其中 $\eta_1 = \eta_n = 0$

2 主要结果

定理 问题 JS 有唯一解的充分条件是:当 $n = 2k$ 时, (i) x, y 中一个是对称向量, 另一个是反对称向量, (ii) $\zeta_1 \neq 0, D_i \neq 0 (i = 2, \dots, k)$, (iii) 方程

$$Z^2 \left(\frac{D_1}{D_k} Z + (\mu - \lambda) \frac{d_k}{D_k} \right) \prod_{i=2}^{k-1} \left[\frac{D_1}{D_i} Z + (\mu - \lambda) \frac{d_i}{D_i} \right]^2 = \beta \quad (9)$$

具有唯一正根 α 使得

$$[D_1 \alpha + (\mu - \lambda) d_i] / D_i > 0 (i = 2, \dots, k) \quad (10)$$

当 $n = 2k + 1$ 时, (i) x, y 都是对称向量, $\zeta_1 \neq 0, \zeta_{k+1} \eta_{k+1} \neq 0, D_i \neq 0 (i = 2, \dots, k)$ 或 x 为对称向量, y 为反对称向量 (x 为反对称向量, y 为对称向量。这一情形的结论、论证与前者类似, 故略去。), $\zeta_1 \zeta_{k+1} \neq 0, D_i \neq 0 (i = 2, \dots, k)$ 。(ii) 方程

$$Z \prod_{i=2}^k \left[\frac{D_1}{D_i} Z + (\mu - \lambda) \frac{d_i}{D_i} \right]^2 = \beta \quad (11)$$

具有唯一正根 α 使得

$$[D_1 \alpha + (\mu - \lambda) d_i] / D_i > 0 (i = 2, \dots, k) \quad (12)$$

证明 分 $n = 2k$ 和 $n = 2k + 1$ 两种情形来证^[2]。

当 $n = 2k + 1$ 时, 令

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_k & 0 & I_k \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ S_k & 0 & -S_k \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & I_{k-1} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ S_{k-1} & 0 & -S_{k-1} \end{pmatrix} \quad (13)$$

易见 u 为正交矩阵, 对 $J_n^{(s)}, J_{n-2}^{(s)}$ 作正交相似变换, 由 (6) 有

$$u_1^T J_n^{(s)} u_1 = \begin{pmatrix} J_k & \sqrt{2} b_k e_k & 0 \\ \sqrt{2} b_k e_k^T & a_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & J_k \end{pmatrix}, u_2^T J_{n-2}^{(s)} u_2 = \begin{pmatrix} J_{k-1} & \sqrt{2} b_k e_{k-1} & 0 \\ \sqrt{2} b_k e_{k-1}^T & a_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & J_{k-1} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\text{记 } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \zeta_{k+1} \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \eta_{k+1} \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

其中 $x_1, x_2 \in R^k, y_1, y_2 \in R^{k-1}$ 。于是 (3) 等价于

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} J_k & \sqrt{2} b_k e_k & 0 \\ \sqrt{2} b_k e_k^T & a_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & J_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + S_k x_2 \\ \sqrt{2} \zeta_{k+1} \\ x_1 - S_k x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 + S_k x_2 \\ \sqrt{2} \zeta_{k+1} \\ x_1 - S_k x_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} J_{k-1} & \sqrt{2} b_k e_{k-1} & 0 \\ \sqrt{2} b_k e_{k-1}^T & a_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & J_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 + S_{k-1} y_2 \\ \sqrt{2} \eta_{k+1} \\ y_1 - S_{k-1} y_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} y_1 + S_{k-1} y_2 \\ \sqrt{2} \eta_{k+1} \\ y_1 - S_{k-1} y_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (16)$$

(1) 当 x, y 都是对称向量时, 问题 JS 有唯一解只要

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} J_k & \sqrt{2}b_k e_k \\ \sqrt{2}b_k e_k^T & a_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}x_1 \\ \zeta_{k+1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \sqrt{2}x_1 \\ \zeta_{k+1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} J_{k-1} & \sqrt{2}b_k e_{k-1} \\ \sqrt{2}b_k e_{k-1}^T & a_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}y_1 \\ \eta_{k+1} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \sqrt{2}y_1 \\ \eta_{k+1} \end{pmatrix} \\ \prod_{i=1}^k b_i^2 = \beta \end{cases} \quad (17)$$

有唯一解。且满足 $b_i > 0 (i = 1, \dots, k)$, 当 $\zeta_1 \neq 0, \zeta_{k+1} \eta_{k+1} \neq 0, D_i \neq 0 (i = 2, \dots, k)$ 及条件(ii)满足时便有此结论^[3]。

(2) 当 x 为对称向量, y 为反对称向量时, 问题 JS 有唯一解只要

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} J_k & \sqrt{2}b_k e_k \\ \sqrt{2}b_k e_k^T & a_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}x_1 \\ \zeta_{k+1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \sqrt{2}x_1 \\ \zeta_{k+1} \end{pmatrix} \\ J_{k-1} y_1 = \mu y_1 \\ \prod_{i=1}^k b_i^2 = \beta \end{cases} \quad (18)$$

有唯一解。且满足 $b_i > 0 (i = 1, \dots, k)$, 当 $\zeta_1 \zeta_{k+1} \neq 0, D_i \neq 0 (i = 2, \dots, k)$, 及条件(ii)满足时便有此结论。

当 $n = 2k$ 时, 证明与此类似, 故略去。

当定理条件满足时, $J_n^{(i)}$ 的非零元素可按以下步骤计算。其中 $b_1 = 0$,

当 $n = 2k + 1$ 时,

$$\begin{cases} b_1 = \alpha \\ a_1 = \lambda - b_1 \zeta_2 / \zeta_1 \\ a_i = \frac{1}{D_i} \begin{vmatrix} \lambda \zeta_i - \zeta_{i-1} b_{i-1} & \zeta_{i+1} \\ \mu \eta_i - \eta_{i-1} b_{i-1} & \eta_{i+1} \end{vmatrix} \quad (i = 2, \dots, k) \\ b_i = (\mu - \lambda) d_i / D_i + b_1 D_1 / D_i \\ a_{k+1} = \lambda - 2b_k \zeta_k / \zeta_{k+1} \end{cases} \quad (19)$$

例: 给定 $\beta = 1, \lambda = \mu = 2, x = (1, 0, -1, 0, 1)^T, y = (-1, 0, 1)^T$, 构造 5 阶全对称 Jacobi 矩阵。

解: 经验证知所给条件满足定理要求, 并可算得 $J_5^{(i)}$ 的非零元为

$$a_1 = a_2 = \dots = a_5 = 2, b_1 = \dots = b_4 = 1$$

参考文献:

- [1] 周树荃, 戴华. 代数特征值反问题[M]. 郑州: 河南科学技术出版社, 1991.
- [2] 殷庆祥. 对称三对角阵和周期三对角阵的特征值反问题[J]. 计算物理, 1995, 12(4): 467 ~ 474.
- [3] 吕炯兴, 孔翠芳. 全对称 Jacobi 矩阵的一类特征值反问题[J]. 南京航空航天大学学报, 1996, 28(5): 608 ~ 613.

Inverse Eigenproblem for Bisymmetric Jacobi Matrices

KONG Cui-fang

(Department of Basic Science of Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224003, PRC)

Abstract: A kind of inverse eigenproblem is proposed for bisymmetric Jacobi matrices. The sufficient condition for the problem to have unique solution has been specified. When the condition holds, the calculating formula derived here can be used.

Keywords: inverse problem; eigenvalue; Jacobian matrices