异步电动机数值解法*

张春永

(盐城工学院 电气系,江苏 盐城 224003)

摘要:阐明了异步电动机一种求解方法,以求解异步电动机的状态方程给出离散解的公式。

关键词:异步电动机;状态方程;状态方程解

中图分类号:TP276

文献标识码:A

文章编号:1008-5092(2000)04-0031-03

异步电动机的数字仿真既是分析其动态特性的工具,又是交流调速控制系统数字仿真的基础。异步电动机的数学模型,在三相绕组对称、忽略铁损、磁饱和效应和空间谐波影响条件下仍为非线性、强耦合和时变参数的五阶微分方程。本文采取了一些措施,使得仿真简单化且准确。

1 $\alpha\beta$ 轴系电路状态方程

鼠笼异步电动机 α, β 轴系电压与电流的关系式为:

$$\begin{bmatrix} U_{\alpha 1} \\ U_{\beta 1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s P & 0 & L_m P & 0 \\ 0 & R_s + L_s P & 0 & L_m P \\ L_m P & W_r' L_m & R_r + L_r P & W_r' L_r \\ -W_r' L_m & L_m P & -W_r' L_r & R_r + L_r P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha 1} \\ I_{\beta 1} \\ I_{\alpha 2} \\ I_{\beta 2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

磁链与电流关系为:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{\alpha 1} \\ \Phi_{\alpha 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & L_m \\ L_m & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha 1} \\ I_{\alpha 2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \Phi_{\beta 1} \\ \Phi_{\beta 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & L_m \\ L_m & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\beta 1} \\ I_{\beta 2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} I_{\alpha 1} \\ I_{\alpha 2} \end{bmatrix} = 1/\delta \begin{bmatrix} -L_r & L_m \\ L_m & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{\alpha 1} \\ \Phi_{\alpha 2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_{\beta 1} \\ I_{\beta 2} \end{bmatrix} = 1/\delta \begin{bmatrix} -L_r & L_m \\ L_m & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{\beta 1} \\ \Phi_{\beta 2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

δ 为矩阵行列式的值。

代得到: $\Phi'(t) = A\Phi(t) + U(t)$, (4)

$$\Phi(t) = [\Phi_{\alpha 1}(t) \quad \Phi_{\beta 1}(t) \quad \Phi_{\alpha 2}(t) \quad \Phi_{\beta 2}(t)]^T,$$

$$U(t) = [U_{\alpha 1}(t) \quad U_{\beta 1}(t) \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{31} & -\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{11} = -R_s L_r / \delta \quad \alpha_{13} = R_s L_m / \delta \quad \alpha_{31} = R_r L_m / \delta \quad \alpha_{33} = -R_r L_s / \delta \quad \alpha_{34} = -W_r \quad \delta = L_s L_r - L_m^2$$

若选取足够小的采样周期 $T_0 = t - t_0$, W_r 转子角速度可视为常数,则磁链状态方程非零初始条件下的解为:

* 收稿日期:2000-08-29

作者简介:张春永(1970-),男,江苏建湖县人,盐城工学院助教。

$$\Phi(t) = \exp(A(t - t_0))\Phi(t_0) + \int_{t_0}^t \exp(A(t - \tau))U(\tau)d\tau. \tag{5}$$

在 T_0 内电压也可视为常数从积分中分离出来。则磁链状态方程的离散解为

$$\Phi(k) = \exp(AT_0)\Phi(k - 1) + B(T_0)U(k - 1), \tag{6}$$

$$B(T_0) = \int_{t_0}^t \exp(A(t - \tau))d\tau \tag{7}$$

2 矩阵的特征值

$$|\lambda I - A| = [(\lambda - \alpha_{11})(\lambda - \alpha_{33}) - \alpha_{31}\alpha_{13}]^2 + \alpha_{34}^2(\lambda - \alpha_{11})^2 = 0 \tag{8}$$

当 $\alpha_{34} = 0$ 时为重根;当 $\alpha_{34} \neq 0$ 时为两对共轭复根。

令 $\lambda = \alpha + j\beta$ 代入(7)并整理有:

$$R = [(\alpha - \alpha_{11})(\alpha - \alpha_{33}) - \alpha_{13}\alpha_{31} - b^2]^2 - b^2[(2\alpha - \alpha_{11} - \alpha_{33})^2 + \alpha_{34}^2] + \alpha_{34}^2(\alpha - \alpha_{11})^2 = 0 \tag{9}$$

虚部

$$I = j2b\{(2\alpha - \alpha_{11} - \alpha_{33})[(\alpha - \alpha_{11})(\alpha - \alpha_{33}) - \alpha_{13}\alpha_{31} - b^2] + \alpha_{34}^2(\alpha - \alpha_{11})\} = 0. \tag{10}$$

$$\text{由虚部得: } b^2 = (\alpha - \alpha_{11})(\alpha - \alpha_{33}) - \alpha_{13}\alpha_{31} + (\alpha - \alpha_{11})\alpha_{34}^2 / (2\alpha - \alpha_{11} - \alpha_{33}). \tag{11}$$

$$\text{把(11)代入(9)式第一项得: } b^2 = (\alpha - \alpha_{11})^2 \alpha_{34}^2 / (2\alpha - \alpha_{11} - \alpha_{33})^2. \tag{12}$$

$$\text{由(11)式和(12)式相等得到: } \alpha^4 + q_1\alpha^3 + q_2\alpha^2 + q_3\alpha + q_4 = 0 \tag{13}$$

$$q_1 = -2(\alpha_{11} + \alpha_{33})$$

$$q_2 = 5/4(\alpha_{11} + \alpha_{33})^2 + \alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{31} + 1/4\alpha_{34}^2$$

$$q_3 = -(\alpha_{11} + \alpha_{33})[1/4(\alpha_{11} + \alpha_{33})^2 + \alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{31} + 1/4\alpha_{34}^2]$$

$$q_4 = (\alpha_{11} + \alpha_{33})^2(\alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{31})/4 + \alpha_{11}\alpha_{33}\alpha_{34}^2/4$$

$$\text{消去 3 次方项令 } \alpha = x - 1/4q_1 = 1/2(\alpha_{11} + \alpha_{33}) + x \tag{14}$$

$$\text{代入得: } x^4 + p_1x^2 + p_2 = 0 \tag{15}$$

$$p_1 = -1/4(\alpha_{11} - \alpha_{33})^2 - \alpha_{13}\alpha_{31} + 1/4\alpha_{34}^2 \tag{16}$$

$$p_2 = -1/16(\alpha_{11} - \alpha_{33})^2 \alpha_{34}^2 \tag{17}$$

$$\text{得到 } x_2 = -p_1/2 + ((p_1/2)^2 - p_2)^{1/2}$$

$$\text{得到 } \alpha = 1/2(\alpha_{11} + \alpha_{33}) + (-p_1/2 + ((p_1/2)^2 - p_2)^{1/2})^{1/2},$$

可以求出两对共轭复根 $\lambda_{12} = \alpha_1 + j\beta_1$, $\lambda_{34} = \alpha_2 + j\beta_2$ 。

当 $\alpha_{34} = 0$ 时则重实根为 $\lambda_{12} = 1/2(\alpha_{11} + \alpha_{33}) + (-p_1)^{1/2}$ 。

3 状态转移矩阵 $\exp(AT_0)$ 的计算

函数矩阵 $\exp(AT_0)$ 的有限多项式矩阵表示: $\exp(AT_0) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3$

系数向量 $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 由下式计算 $\alpha = \Lambda^{-1}E$

Λ 为特征值, λ_i 的范德蒙特矩阵。

E 为特征值 λ_i 的指数向量。

(1)特征值为共轭复数的情况

$$E = [\exp(\lambda_1 T_0) \quad \exp(\lambda_2 T_0) \quad \exp(\lambda_3 T_0) \quad \exp(\lambda_4 T_0)]^T$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 \end{bmatrix}^0$$

可利用欧拉公式求出 α_i 的实数计算公式。

(2)对于重根

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ 0 & 1 & 2\alpha_1 & 3\alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ 0 & 1 & 2\alpha_2 & 3\alpha_2^2 \end{bmatrix}^{-1},$$

$$E = [\exp(\alpha_1 T_0) \quad T_0 \exp(\alpha_1 T_0) \quad \exp(\alpha_2 T_0) \quad T_0 \exp(\alpha_2 T_0)]^T.$$

4 输入积分矩阵 $B(T_0)$ 的计算

由(7)式知 $B(T_0)$ 是 $\exp(AT_0)$ 的积分。

$\exp(A(t-\tau))$ 如(19)式所示包含 A 矩阵和 α_i , A 矩阵中的元素有些并非常数, 尤其 α_{34} 在调速过程中是变化的, 从而导致特征值的变化。但它们的变化较之 α_i 中的时间函数缓慢得多。在 T_0 内可视为常数。故可按下式计算:

$$B(T_0) = \beta_0 T + \beta_1 A + \beta_2 A^2 + \beta_3 A^3$$

$$\beta_i = \int_{t_0}^t \alpha_i(t-\tau) d\tau$$

考虑到特征值的变化缓慢而近似常数, $B(T_0)$ 的计算基本和 $\exp(AT_0)$ 算式相同。另外由于转子电压为零, 所以只需算前两列。

5 异步电机角速度计算

异步电机转矩: $M(k) = NpLm/6[\Phi_{\beta 1}(k)\Phi_{\alpha 2}(k) - \Phi_{\beta 2}(k)\Phi_{\alpha 1}(k)]$

电机转子角速度由下式计算

$W_r(k) = W_r(k-1) + \Delta W_r(k)$, $\Delta W_r(k) = T_0 dW_r(k)/dt$, $dW_r(k)/dt = Np/J(M(k) - M_z)$
 M_z 为负载转矩。

$W_r(k)$ 作为 A 矩阵元素 α_{34} 的新值计算新的磁链值。

对于 $B(T_0)$ 和 $\exp(AT_0)$ 的计算公式较繁琐, 限于篇幅请参阅有关书籍。

参考文献:

- [1] 李友善. 自动控制原理[M]. 北京: 国防工业出版社, 1997.
 [2] 朱震莲. 现代交流调速系统[M]. 南京: 南京航空航天大学, 1998.

Digital simulation of asynchronous motor abstract

ZHANG Chun-yong

(Department of Electrical Engineering of Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224003, PRC)

Abstract: In this paper a new algorithm to simulate asynchronous motor is expounded. This first step is to find the solution of circuit state equation of asynchronous motor and the second is to give simple and practical formula of its solution.

Keywords: asynchronous motor; Equation of states; Solution of state equation