连续梁板结构的递推计算与应用*

崔清洋，周咏馨
（盐城工学院 建筑工程系，江苏 盐城 224003）

摘 要：推出了求解无结点侧移连续梁的结点转角位移的递推公式，进而求得梁板的内力。本方法概念清楚，不解方程，手算方便，并且又宜编程、机算。

关键词：连续梁；位移法；递推公式；内力

中图分类号：TU311 **文献标识码**：A **文章编号**：1008－5092(2001)01－0030－03

工程上常用力矩分配法计算连续梁的内力。计算中需要多次传递运算，又不便于编程。考虑上述的不足，本文提出用递推法求解连续梁板的位移法方程，得到了求转角位移的递推公式，进而可求得梁板的弯矩和剪力。其特点是不解方程、手算方便，并且又宜编程、机算。

1 计算原理

1.1 位移法方程

以图 1 所示的 n 跨连续梁为例。梁的结点、杆件用数字标识，约定从左至右顺序编号。

杆端弯矩、剪力、结点转角及结点的不平衡力矩的正负号规则与位移法[1]相同。根据位移法原理，计算时可取图 2 所示的基本结构。荷载作用在基本结构上求出各杆的固端弯矩和固端剪力，[2]由此可求出各结点的不平衡力矩，记为小写字母 m_j（j 为结点编号），其负值记为大写字母 M_j。放松结点后产生的结点转角标记为 θ_j（$j=1,2,\cdots n$）。则位移法方程为：

$$4\left(\frac{EI_1}{L_1}+\frac{EI_2}{L_2}\right)\theta_1+2\frac{EI_2}{L_2}\theta_2=M_1 \tag{1}$$

$$2\frac{EI_j}{L_j}\theta_{j-1}+4\left(\frac{EI_j}{L_j}+\frac{EI_{j+1}}{L_{j+1}}\right)\theta_j+2\frac{EI_{j+1}}{L_{j+1}}\theta_{j+1}=M_j \quad (j=2,3,\cdots n-1) \tag{2}$$

$$2\frac{EI_n}{L_n}\theta_{n-1}+4\frac{EI_n}{L_n}\theta_n=M_n \tag{3}$$

其中，L_j、I_j 分别代表第 j 跨的计算跨度和惯性矩；E 为梁的材料的弹性模量。

连续梁一般还有图 3、图 4 两种形式，其杆件与结点编号如图中所示。

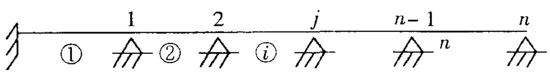

图 1 计算简图 Fig.1 counted simple chart

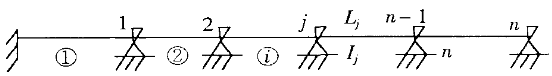

图 2 计算简图 Fig.2 counted simple chart

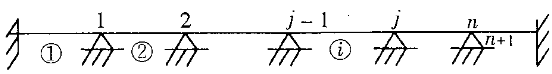

图 3 计算简图

Fig.3 counted simple chart

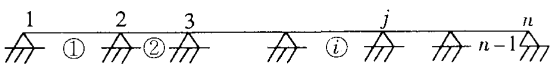

图 4 计算简图

Fig.4 counted simple chart

对于图 3 所示的情况，前 $n-1$ 个方程与(1)、(2)式相同，第 n 个方程为：

$$2\frac{EI_n}{L_n}\theta_{n-1}+4\left(\frac{EI_n}{L_n}+\frac{EI_{n+1}}{L_{n+1}}\right)\theta_n=M_n \tag{4}$$

对于图 4 所示的情况，由于结点编号、单元编号不同于前两种情况，其位移方程为：

$$4\frac{EI_1}{L_1}\theta_1+2\frac{EI_1}{L_1}\theta_2=M_1 \tag{5}$$

$$2\frac{EI_{j-1}}{L_{j-1}}\theta_{j-1}+4\left(\frac{EI_{j-1}}{L_{j-1}}+\frac{EI_j}{L_j}\right)\theta_j+2\frac{EI_j}{L_j}\theta_{j+1}=M_j \quad (j=2,3,\cdots n-1) \tag{6}$$

* 收稿日期：2000－08－29
作者简介：崔清洋(1944-)，男，山西长治县人，盐城工学院教授，主要研究方向：建筑结构分析。

$$2\frac{EI_{n-1}}{L_{n-1}}\theta_{n-1}+4\frac{EI_{n-1}}{L_{n-1}}\theta_n=M_n \tag{7}$$

1.2 方程的递推解法

以图 1 所示连续梁为例,计算转角位移的公式推导如下:该梁的位移法方 程为(1)、(2)、(3),由方程(1)得

$$\theta_1=(M_1-2\frac{EI_2}{L_2}\theta_2)/4(\frac{EI_1}{L_1}+\frac{EI_2}{L_2}) \tag{8}$$

设 $$B_1=M_1,A_1=4(\frac{EI_1}{L_1}+\frac{EI_2}{L_2}) \tag{9}$$

则 $$\theta_1=(B_1-2\frac{EI_2}{L_2}\theta_2)/A_1 \tag{10}$$

当 $j=2$ 时,由方程(2)得

$2\frac{EI_2}{L_2}\theta_1+4(\frac{EI_2}{L_2}+\frac{EI_3}{L_3})\theta_2+2\frac{EI_3}{L_3}\theta_3=M_2$,将(10)式代入该式,整理得:

$$\theta_2=[M_2-2\frac{EI_2}{L_2}\frac{B_1}{A_1}-2\frac{EI_3}{L_3}\theta_3]/4[\frac{EI_2}{L_2}+\frac{EI_3}{L_3}-\frac{1}{A_1}(\frac{EI_2}{L_2})^2] \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{令 } A_2=4[\frac{EI_2}{L_2}+\frac{EI_3}{L_3}-\frac{1}{A_1}](\frac{EI_2}{L_2})^2]\\&B_2=M_2-2\frac{EI_2}{L_2}\frac{B_1}{A_1}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

则 $\theta_2=(B_2-2\frac{EI_3}{L_3}\theta_3)/A_2$

设 $j=k$ 时,(12-1)、(12-2)、(13)式成立,即:

$$\left.\begin{aligned}&A_k=4[\frac{EI_k}{L_k}+\frac{EI_{k+1}}{L_{k+1}}-\frac{1}{A_{k-1}}(\frac{EI_k}{L_k})^2]\\&B_k=M_k-2\frac{EI_k}{L_k}\frac{B_{k-1}}{A_{k-1}}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\theta_k=(B_k-2\frac{EI_{k+1}}{L_{k+1}}\theta_{k+1})/A_k \tag{15}$$

当 $j=k+1$ 时,将(15)式代入(2)式整理得

$$\theta_{k+1}=[M_{k+1}-2\frac{EI_{k+1}}{L_{k+1}}\frac{B_k}{A_k}-2\frac{EI_{k+2}}{L_{k+2}}\theta_{k+2}]/$$
$$4[\frac{EI_{k+1}}{L_{k+1}}+\frac{EI_{k+2}}{L_{k+2}}-\frac{1}{A_k}(\frac{EI_{k+1}}{L_{k+1}})^2] \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{设 } A_{k+1}=4[\frac{EI_{k+1}}{L_{k+1}}+\frac{EI_{k+2}}{L_{k+2}}-\frac{1}{A_k}(\frac{EI_{k+1}}{L_{k+1}})^2]\\&B_{k+1}=M_{k+1}-2\frac{EI_{k+1}}{L_{k+1}}\frac{B_k}{A_k}\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\theta_{k+1}=[B_{k+1}-2\frac{EI_{k+2}}{L_{k+2}}\theta_{k+2}]/A_{k+1} \tag{18}$$

可此可知(14-1)、(14-2)、(15)式对于 $k=2,3,\cdots n-1$ 均成立。当 $k=n-1$ 时有

$$\theta_{n-1}=(B_{n-1}-2\frac{EI_n}{L_n}\theta_n)/A_{n-1} \tag{19}$$

将(19)式代入(3)式,整理得 $\theta_n=\frac{B_n}{A_n}$ (20)

$$\left.\begin{aligned}&A_n=4[\frac{EI_n}{L_n}-\frac{1}{A_{n-1}}(\frac{EI_n}{L_n})^2]\\&B_n=M_n-2\frac{EI_n}{L_n}\frac{B_{n-1}}{A_{n-1}}\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

于是,对于方程(1)、(2)、(3)求解可得如下递推公式:

$$\left.\begin{aligned}&A_1=4(\frac{EI_1}{L_1}+\frac{EI_2}{L_2})\\&A_j=4[\frac{EI_l}{L_l}+\frac{EI_{l+1}}{L_{l+1}}-\frac{1}{A_{l-1}}(\frac{EI_l}{L_l})^2]\\&(j=2,3,\cdots n-1)\\&A_n=4[\frac{EI_n}{L_n}-\frac{1}{A_{n-1}}(\frac{EI_n}{L_n})^2]\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned}&B_1=M_1\\&B_j=M_j-2\frac{EI_j}{L_j}\frac{B_{j-1}}{A_{j-1}},(j=2,3,\cdots n)\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$\theta_j=(B_j-2\frac{EI_{j+1}}{L_{j+1}}\theta_{j+1})/A_j \tag{24}$$

$$\theta_n=B_n/A_n$$

对于图 3 所示连续梁和图 1 情况比较,只是第 n 个方程不同,递推公式也只在 $j=n$ 时与上不同。

$$\left.\begin{aligned}&A_n=4[\frac{EI_n}{L_n}+\frac{EI_{n-1}}{L_{n+1}}-\frac{1}{A_{n-1}}(\frac{EI_n}{L_n})^2]\\&B_n=M_n-2\frac{EI_n}{L_n}\frac{B_{n-1}}{A_{n-1}}\\&\theta_n=B_n/A_n\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

对于图 4 所示连续梁,其递推公式为:(推导过程同上,此处略)

$$\left.\begin{aligned}&A_1=4\frac{EI_1}{L_1}\\&A_j=[\frac{EI_{j-1}}{L_{j-1}}+\frac{EI_j}{L_j}-\frac{1}{A_{j-1}}(\frac{EI_{j-1}}{L_{j-1}})^2]\\&(j=2,3,\cdots n-1)\\&A_n=4[\frac{EI_{n-1}}{L_{n-1}}-\frac{1}{A_{n-1}}(\frac{EI_{n-1}}{L_{n-1}})^2]\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned}&B_1=M_1\\&B_j=M_j-\frac{EI_{j-1}}{L_{j-1}}\frac{B_{j-1}}{A_{j-1}}\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned}&\theta_j=(B_j-2\frac{EI_i}{L_j}\theta_{j+1})/A_j\\&(j=1,2,\cdots n-1)\\&\theta_n=B_n/A_n\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

1.3 内力计算与算例

利用上面的递推公式,按以下步骤计算内力:

(1)根据各跨的荷载情况,用位移法的基本结构求出固端弯矩和固端剪力[3],记为 M_i^F,M_j^F,Q_i^F,Q_j^F,i 与 j 分别表示梁单元的左端与右端。

(2)求出各结点的不平衡力矩并将其反号,记

为大写字母 M_j。

(3)用本文推出的公式求出 A_j 和 B_j,(= 1,2,$\cdots n$),再从 n 到 1 依次回代求 $\theta_j(j=1,2,\cdots n)$。

(4)由转角位移产生的杆端弯矩、杆端剪力记为 $M_i^W, M_j^W, Q_i^W, Q_j^W$,($i, j$ 分别表示左端和右端),其大小由(29)式[2]求出:

(5)用式(30)计算梁的实际内力

$$\begin{Bmatrix} M_i^W \\ Q_i^W \\ M_j^W \\ Q_j^W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-6EI}{L^2} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \\ \frac{-6EI}{L^2} & \frac{-6EI}{L^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix} \tag{29}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ M_i \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_i^F \\ M_i^F \\ Q_j^F \\ M_j^F \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_i^W \\ M_i^W \\ Q_j^W \\ M_j^W \end{Bmatrix} \tag{30}$$

θ_i, θ_j 分别表示所求梁单元左端和右端的转角。

算例

求图 5 所示连续梁[1]的杆端内力

解:结点、单元编号如图所示。

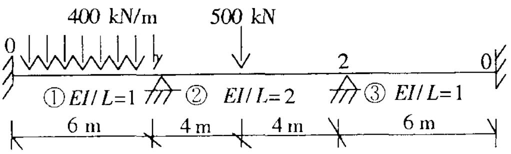

图 5 计算简图

Fig.5 Counted simple chart

(1)求固端内力 $M_i^F, M_j^F, Q_i^F, Q_j^F$,无论对于固定端或铰支端,均按两端固定时的情况求得。见表 1。

表 1 内力计算表

Table 1 The internal force

杆 号	1		2		3	
M^F	−1200	1200	−500	500	0	0
M^W	−100	−200	−500	−400	−100	−50
M^F+M^W	−1300	1000	−1000	100	−100	−50
Q^F	1200	−1200	250	−250	0	0
Q^W	50	50	112.5	112.5	25	25
Q^F+Q^W	1250	−1150	362.5	−137.5	25	25

2 结束语

用此方法求解结果与用其它方法计算完全一致。因为递推公式本身是精确的,所以求出的内力精度可以保证。由于递推公式比较规范,运算量较少,适合手算。由于公式表示很有规律,所釉也宜于编程机算。此方法和计算公式适用于等跨或不等跨的等截面连续梁,连续板结构的受力分析,对水工建筑,如渡槽的计算也是有效的。本文计算公式也适用于图 6 所示 Γ 型无结点线位移刚架的分析计算。

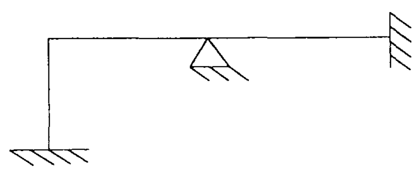

图 6 计算简图

Fig.6 Counted simple chart

参考文献:

[1] 龙驭球.结构力学教程[M].北京:高等教育出版社,1996.

[2] 崔清洋.平面刚架矩阵位移分析与程序设计[J].宁夏工学院学报,1994,(4):79~84.

[3] 崔清洋.渡槽结构计算机分析与设计[J].宁夏农学院学报,1993,(3):50~53.

Recursion Formulae and Application of the Continuous Beam

CUI Qing-yang, ZHOU Yong-xin

(Department of architecture and civil engineering of Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224003, PRC)

Abstract: The Recursion formulae of the node corner displacement are derived in the text and that internal of the beam can be solved. The concepts of the method are clear, It is convenient for the manus calculation and the programs is suitable.

Keywords: Continuous beams; Displacement method; Recursion formulae; Internal forces.