

运用等效系统法原理计算变刚度梁*

孟 晓

(盐城工学院 建筑工程系, 江苏 盐城 224003)

摘 要:对等效系统法原理公式加以推导,利用其计算变刚度静定梁的位移和变刚度超静定梁的内力,说明等效系统近似法和变刚度超静定梁的计算步骤和过程,并通过实例加以说明。

关键词:等效系统法; 位移; 静定梁; 超静定理

分类号:TU378.2

文献标识码:A

文章编号:1008-5092(2001)01-0039-03

1 公式的推导

等效系统法是将变刚度 $E_x I_x$ 的梁用等刚度 $E_1 I_1$ 的梁来代替,其中等效系统的每一个挠曲线等于原来的变刚度梁的挠曲线。若由一已知的变刚度梁得到了一个等效系统,就可用等效系统对原结构进行计算。

弹性曲线的一般微分方程为

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_x}{E_x I_x}, \quad (1)$$

积分二次得

$$y = \int \left(-\int \frac{M_x}{E_x I_x} dx \right) dx + C_1 \int dx + C_2, \quad (2)$$

式中 C_1 和 C_2 是积分常数,可根据变刚度梁的边界条件来确定。

构件的变刚度 $E_x I_x$ 可以表达如下:

$$E_x I_x = E_1 I_1 f(x), \quad (3)$$

式中 $E_1 I_1$ 是刚度 $E_x I_x$ 的一个任意参考值。而 $f(x)$ 是 x 的函数,代表 $E_x I_x$ 对参考值 $E_1 I_1$ 的变化规律。

把式(3)代入式(2)得

$$y = \frac{1}{E_1 I_1} \int \left[-\int \frac{M_x}{f(x)} dx \right] dx + C_1 \int dx + C_2. \quad (4)$$

关于等刚度 $E_1 I_1$ 的梁,其长度和轴的参考系数等于式(4)代表的梁,它的弹性曲线 y_e 是

$$y_e = \frac{1}{E_1 I_1} \int \left[-\int M_e dx \right] dx + C_1' \int dx + C_2', \quad (5)$$

式中 M_e 代表等刚度 $E_1 I_1$ 的梁在 x 处的弯矩, C_1' 、 C_2' 是积分常数。

式(4)和式(5)代表的弹性曲线是相同的,且二构件的长度及边界条件也是相同的,所以

$C_1 = C_1'$, $C_2 = C_2'$, 则有

$$\int \left[-\int \frac{M_x}{f(x)} dx \right] dx = \int (-M_e dx) dx$$

即 $M_e = M_x / f(x) \quad (6)$

上式讨论说明了一个变刚度 $E_x I_x$ 的梁总是存在一个等刚度 $E_1 I_1$ 的等效系统,它的边界条件与长度和变刚度梁相同,而在任意截面上的弯矩等于式(6),所以等刚度 $E_1 I_1$ 的等效系统的弯矩图可由式(6)确定。

假设 $M(x)$ 和 $f(x)$ 可以算出,则可由式(6)算出 M_e 。等效系统的剪力 Q_e 和作用荷载可由下列二式确定:

$$Q_e = \frac{d}{dx} (M_e) = \frac{d}{dx} \left(\frac{M_x}{f(x)} \right), \quad (7)$$

$$q_e = -\frac{d}{dx} (Q_e) = -\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{M_x}{f(x)} \right). \quad (8)$$

由于参考刚度值是可以任意选择的,所以一个已知的变刚度梁可以得到任意数目的等效系统。若 $f(x) = 1$, 则 $E_x I_x = E_1 I_1$, 即等效系统的刚度等于原结构的刚度。

* 收稿日期:2000-11-06

作者简介:孟 晓(1968-),女,江苏滨海县人,盐城工学院实验师。

2 利用等效系统法原理计算变刚度静定梁的位移

变刚度静定梁的支座反力、内力与它的材料性质、截面大小无关,其值可由静力平衡条件求出。变刚度静定梁的位移是指工程结构上经常遇到的材料相同、截面惯矩变化的静定梁的位移。其值可利用等效系统法原理计算出。

用实例加以说明,见例 1。

必须指出,上面讨论的用等效系统法求变刚度梁的位移是指刚度的变化与荷载的变化都可以表示为 x 的函数时才能进行。但是,有时虽然刚度的变化与荷载的变化都可以表示为 x 的函数,但计算相当复杂;或者刚度的变化、荷载的变化不能表示为 x 的函数,这时可根据 M_e 的形状近似地用直线段长度 ΔS_n 来逼近 ($n=1,2,3,\dots$),这样就使计算得到了简化。现以图 1-a 所示结构来说明等效系统近似法的计算步骤和过程。

(1) 选择一个刚度参考值 $E_1 I_1$ 沿构件长度上有足够数量的横截面计算 $f(x) = \frac{E_x I_x}{E_1 I_1}$ 的值,刚度函数图示于图 1-b。

(2) 计算实际弯矩 M_x , 并绘成图,见图 1-c。

(3) 将 M_e 值除以 $f(x)$ 的相应值,得等效系统的弯矩 $M_e = M_x / f(x)$, 如图 1-d 所示的实线部分。

(4) 根据 M_e 的形式可近似地用直线段长度 ΔS_n 来逼近 ($n=1,2,3,\dots$), 如图 1-d 所示的虚线部分。 ΔS_n 不一定要等长,最佳的近似线段数目依赖于 M_e 图的形式。通常合理地选择 3~5 段就足够了。

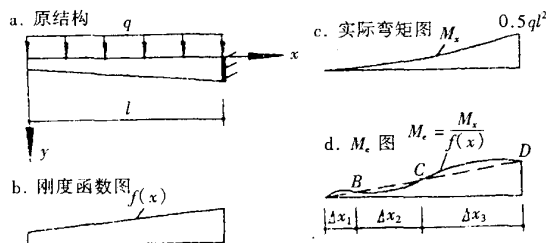


图 1 近似法的计算步骤与过程说明图

Fig. 1 Graphs of Calculating Steps and Courses about Near Law

(5) 应用共轭梁法求出位移。用实例加以说明,见例 2。

3 利用等效系统法原理计算变刚度超静定梁的内力

以图 2-a 所示超静定梁加以说明。

刚度变化 $f(x) = E_x I_x / E_1 I_1$, 如图 2-b 所示, 基本结构如图 2-c 所示。

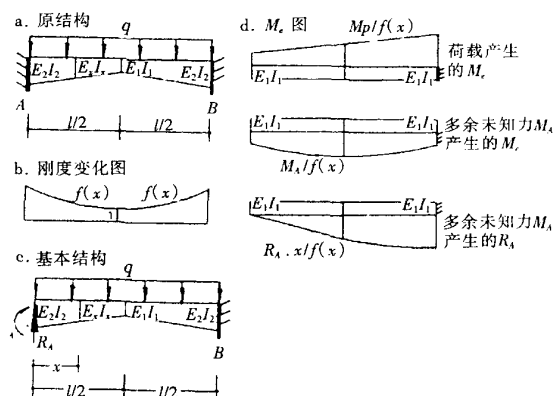


图 2 变刚度超静定梁的内力计算步骤与过程说明图

Fig. 2 Graphs of Calculating Steps and Courses about Internal Force of Ex-static Girder of Changing Stiffness

变刚度梁任意 x 的弯矩为 M_x , 则等效刚度 $E_1 I_1$ 梁的等效系统弯矩为 $M_e = M_x / f(x)$ 。式中 M_x 为基本结构由荷载和多余未知量 M_A 、 R_A 共同产生的弯矩, $M_e = (M_p + M_A + R_A x) / f(x)$ 。

为此, 采用等效系统法原理, 根据 A 点的变形条件求多余未知量 M_A 、 R_A 。

$$\left. \begin{aligned} \theta_A &= \theta'_A + \theta''_A + \theta'''_A = 0 \\ \delta_A &= \delta'_A + \delta''_A + \delta'''_A = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

式中 θ'_A 、 δ'_A 表示采用等效系统的基本结构中, 由荷载产生的转角和挠度;

θ''_A 、 δ''_A 表示采用等效系统的基本结构中, 由多余未知量 R_A 产生的转角和挠度;

θ'''_A 、 δ'''_A 表示采用等效系统的基本结构中, 由多余未知量 M_A 产生的转角和挠度;

解方程 (9), 即可求出多余未知量 M_A 、 R_A 。从而可由静力平衡条件求出任一截面的内力和支座反力。用实例加以说明, 见例 3。

例 1 求图 3-a 所示的固端悬臂梁任意点的挠度和转角。A 截面的惯矩是 I_1 , B 截面的惯矩为 I_b , 惯矩的变化规律近似地表达为

$$I_b / I_1 (x) = 1 + (n-1)(1-x/l)^2,$$

$$I_1 (x) = I_b f(x), \text{ 式中 } n = I_b / I_1,$$

$$f(x) = 1 / [1 + (n-1)(1-x/l)^2],$$

变刚度梁任意点 x 的弯矩 $M_x = -PX$, 等刚度 EI_b 的等效系统弯矩(图 3-b)

$M_e = M_x/f(x) = -PX[1 + (n-1)(1 - x/l)^2]$ 。等效系统的共轭梁如图 3-c 所示。

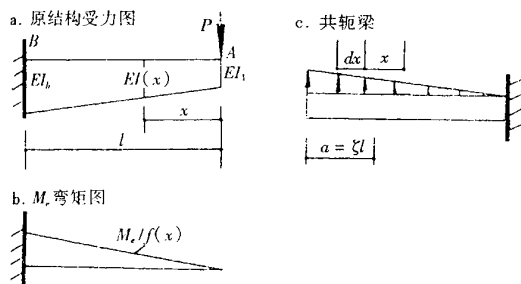


图3 悬臂梁自由端的弯形计算说明图

Fig.3 Graphs of every point's deformation calculation of suspensorius girder

任意点挠度

$$f_a = \int_0^a \frac{M_e x}{EI_b} dx = \frac{P}{EI_b} \int_0^a x^2 [1 + (n-1)(1 - \frac{x}{l})^2] dx = \frac{P}{30EI_b} [10\xi^2 + (n-1)(10\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5)],$$

式中 $\xi = a/l$ ($0 \leq \xi \leq 1$),

A 点的挠度 ($\xi = 1$),

$$f_a = \frac{Pl^3}{30EI_b} [10 + (n-1)$$

$$(10 \times 1 - 15 \times 1 + 6 \times 1)] = \frac{Pl^3}{30EI_b} (1 + \frac{n-1}{10}).$$

任意点转角

$$\theta_a = \int_0^a \frac{M_e x}{EI_b} = \frac{Pl^2}{12EI_b} [6\xi^2 + (n-1)(6\xi^2 - 8\xi^3 + 3\xi^4)]$$

A 点转角 ($\xi = 1$)

$$\theta_a = \frac{Pl^2}{12EI_b} [6 + (n-1)(6 \times 1 - 8 \times 1 + 3 \times 1)] = \frac{Pl^2}{2nEI_b} (1 + \frac{n-1}{6})$$

例2 试用等效系统近似求出图 4-a 所示的固端悬臂梁自由端的挠度和转角。刚度变化如图 4-b 所示。

解: 作弯矩图(见图 4-c) $M_x = -0.5qx^2$

$$x = 30 \text{ cm} \quad M_1 = 0.5 \times 0.18 \times 30^2 = -81 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

$$x = 80 \text{ cm} \quad M_2 = 0.5 \times 0.18 \times 80^2 = -576 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

$$x = 150 \text{ cm} \quad M_3 = 0.5 \times 0.18 \times 150^2 = -2025 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

作 M_e 图(图 4-d)

$$x = 30 \text{ cm} \quad M_{e1} = -81/(1.6EI_1) = -50.5 \text{ N} \cdot \text{cm}/EI_1$$

$$x = 80 \text{ cm} \quad M_{e2} = -576/(2.6EI_1) = -222 \text{ N} \cdot \text{cm}/EI_1$$

$$x = 150 \text{ cm} \quad M_{e3} = -2025/(4EI_1) = -506 \text{ N} \cdot \text{cm}/EI_1$$

用共轭梁法求 A 点位移。共轭梁示于图 4

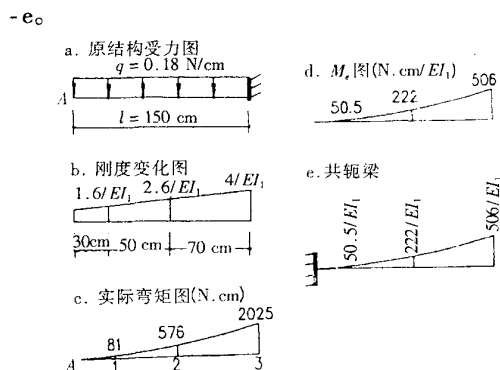


图4 悬臂梁自由端的受形计算说明图

Fig.4 Graphs of deformation calculation of free and about suspensorius

$$f_A = [0.5 \times 30 \times 50.5 \times 2/3 + 50.5 \times 50 \times 50 \times (30 + 50/2) + 0.5 \times 171.5 \times 50 \times (30 + 100 \times 2/3) + 222 \times 70 \times (80 + 70/2) + 0.5 \times 70 \times 284 \times (80 + 70 \times 2/3)] = 3.48 \times 10^6 / EI_1,$$

$$\theta_A = [0.5 \times 30 \times 50.5 + 0.5 \times (50 + 222) \times 50 + 0.5 \times (222 + 506) \times 70] = 3.297 \times 10^4 / EI_1$$

例3 作图 5-a 所示变截面连续梁的弯矩图。截面为矩形。

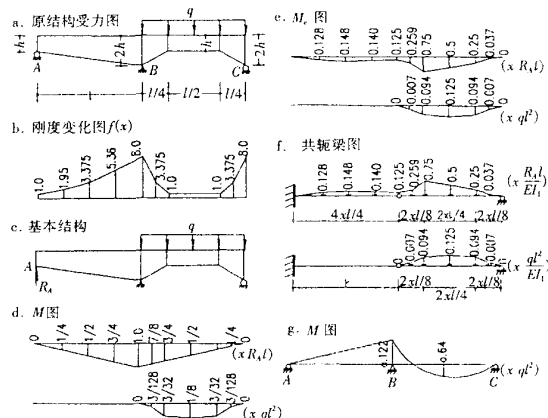


图5 变截面连续梁的弯矩计算说明图

Fig.5 Graphs of bending moment of changing section of continuous girder

解: 刚度变化示于图 5-b, 基本结构示于图 5-c, 分离的实际弯矩示于图 5-d, $M_e = M_x/f(x)$ 示于图 5-e。A 点的变形条件为 $\delta_A = \delta'_A + \delta''_A = 0$,

式中 δ'_A 为由多余未知力 R_A 在等效系统的基本结构中产生的挠度; δ''_A 为由荷载在等效系统的基本结构中产生的挠度。

采用等效系统,应用共轭梁法求 δ'_A 、 δ''_A 。

共轭梁示于图 5-f。

$$\delta'_A = (71.4958/256) \times R_A \times l^2/EI_1$$

$$\delta''_A = 0.545ql^3/16EI_1$$

根据 A 点的变形条件求多余未知力。

$$71.4958/256 \cdot R_A \times l^2/EI_1 + 0.54ql^3/16EI_1 = 0$$

$$R_A = -0.122ql(\downarrow)$$

求出支座反力 R_A 后,可按静力平衡条件求弯矩。弯矩示于图 5-g。

参考文献:

- [1] 孙训方.材料力学(上册)[M].第2版.北京:高等教育出版社,1987.

Calculating Girders of Changing Strong Tolerate By Using Principle of Equivalent System Law

MENG Xiao

(Department of Art Designing, Jiangsu Yancheng 224003, PRC)

Abstract: Formulates of principle of equivalent system law deduced. Making use of them, displacement of static girder and internal force of Exstatic girder of changing strong tolerate are calculated. And in this paper, calculating steps and courses about near law of equivalent system and exstatic girders of changing strong tolerate are also illuminated. In order to make out the law, this paper also uses several examples.

Keywords: law of equivalent system; displacement; static girders; exstatic girders

(上接第 15 页)

表 3 山梨酸工业废水处理结果

Table 3 Treatment results of the wastewater

名称	原废水	预处理废水		生化处理后废水		总去除率
		处理后	去除率	处理后	去除率	
COD _{Cr} (mg/L)	15000	1686	88.7%	146	91.3%	99%

的微生物,使经过预处理后的山梨酸工业废水的 COD 能大幅度降低,说明废水具有可生化性。

5.2 在厌氧水解阶段,废水的 COD 下降仅为 22%,去除率较低。

5.3 厌氧—好氧法处理山梨酸污水的设备简单、处理效果好, COD 可下降至 150 以下,去除率达 91.3% 以上。

参考文献:

- [1] 刘志皋,高彦祥.食品添加剂基础[M].北京:中国轻工业出版社,1991.
[2] 薛苏生.山梨酸的生产应用及发展前景[J].江苏化工,1998,(23):13~15.
[3] 张秋望,王秀芳.化工环境污染及治理技术[M].北京:中国轻工业出版社,1994.
[4] 徐雅琴,李凤芝.山梨酸及其应用[J].化学工程师,1998.5.
[5] 秦麟源.废水生物处理[M].上海:同济大学出版社,1989.

Feasible Study on Biological Treatment of Sobic Acid Industry Wastewater

DING Cheng, BO Yun-san, QIAN Xiao-rong, WANG Yu-qing, ZHENG Qing

(Department of Ocean Engineering of Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224003, PRC)

Abstract: Sobic is a kind of food antiseptic. It has restrain impact to microbe. Its industry wastewater can be bio-chemical treatment only after pretreatment. High concentration wastewater from sobic acid plant was studied and presented. Result shows that COD_{Cr} removal efficiency more than 91.3%. Two important parameters: aerating time and quantity.

Keywords: Wastewater; Biological treatment; Feasible