关于三角不等式的推广及证明*

葛玉风
(盐城工学院 基础部,江苏 盐城 224003)

摘　要:根据复数三角不等式得出一个新的不等式及其特例,并给出了一般情况下的证明。

关键词:三角不等式;　特例;　证明
中图分类号:O12　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1008-5092(2001)01-0069-02

在复数理论中,有三角不等式

$$\| z_1 |-| z_2 \| \leqslant | z_1 + z_2 | \leqslant | z_1 |+| z_2 | \tag{1}$$

其中,z_1, z_2 为复数[1],将不等式(1)进行推广,能得如下定理。

定理1　设 x_1, x_2, z 为复数,当 $z = c_1x_1 + c_2x_2$,且 $|c_j| = 1, j = 1,2$ 时,

有 $$\| x_1 |-| x_2 \| \leqslant | z | \leqslant | x_1 |+| x_2 | \tag{2}$$

反之,不等式(2)成立时,存在复数 c_1, c_2,且 $|c_j| = 1, j = 1,2$,使 $z = c_1x_1 + c_2x_2$。

更一般地,有定理2。

定理2　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 及 z 为复数,当 $z = \sum_{j=1}^{n}$,且 $|c_j| = 1, j = 1,2\cdots,n$ 时,

$$\max[2\max_{1\leqslant j\leqslant n}(|x_j|) - \sum_{j=1}^{n}|x_j|,0] \leqslant |z| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|x_j| \tag{3}$$

反之,不等式(3)成立时,存在复数 c_j,且 $|c_j| = 1, j = 1,2,\cdots,n$,使 $z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$

显然,定理1是定理2的特殊情形($n = 2$ 时),故下面仅证明定理2。

证明1　设 $z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$,其中 $|c_j| = 1, j = 1, 2, \cdots, n$。一方面,根据(1)式右边不等式

有 $|z| = |\sum_{j=1}^{n} c_jx_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|c_jx_j| = \sum_{j=1}^{n}|x_j|$

另一方面,对任意确定的 k,($1\leqslant k\leqslant n$),根据(1)式左边有

$$|z| = |\sum_{j=1}^{n} c_jx_j| = |c_kx_k + \sum_{j\neq k}c_jx_j| \geqslant |c_kx_k| - |\sum_{j\neq k}c_jx_j| = |x_k| - |\sum_{j\neq k}c_jx_j| \geqslant 2|x_k| - \sum_{j=1}^{n}|x_j|$$

即 $|z| \geqslant \max[2\max_{1\leqslant j\leqslant n}(|x_j|) - \sum_{j=1}^{n}|x_j|,0]$

从而有不等式(3)。

证明2　设不等式(3)成立,证明 $z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$,其中 $|c_j| = 1, j = 1,2,\cdots,n$。

当 $n = 1$ 时,结论显然成立。对 $n\geqslant 2$,考虑两种情形。

情形1($n = 2$),假设 x_1, x_2, z 满足不等式(2),当 x_1, x_2 或中有一个为零时结论显然成立。

因此不妨假设 x_1, x_2, z 均不为零。由(2)得

$$\left|\frac{|x_1|^2 - |x_2|^2 + |z|^2}{2|x_1||z|}\right| \leqslant 1$$

$$\left|\frac{|x_2|^2 - |x_1|^2 + |z|^2}{2|x_2||z|}\right| \leqslant 1$$

从而存在 $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant\pi$ 使得

$$\cos\alpha = \frac{|x_1|^2 - |x_2|^2 + |z|^2}{2|x_1||z|}$$

$$\sin\beta = \frac{|x_2|^2 - |x_1|^2 + |z|^2}{2|x_2||z|}$$

由 $\sin^2x + \cos^2x = 1$ 得

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{a}}{2|x_1||z|}, \qquad \sin\beta = \frac{\sqrt{a}}{2|x_2||z|}$$

其中 $a = [(|x_1| + |x_2|)^2 - |z|^2][|z|^2 - (|x_1| -$

---

* 收稿日期:2000-06-15
作者简介:葛玉风(1968-),女,江苏盐都县人,盐城工学院讲师,研究方向:高等代数。

万方数据

$|x_2|)^2]\geqslant 0$,因此

$$e^{i\alpha}|x_1| + e^{-i\beta}|x_2| =$$

$$\left[\frac{|x_1|^2 - |x_2|^2 + |z|^2}{2|x_1\|z|} + i\frac{\alpha}{2|x_1\|z|}\right]|x_1| +$$

$$\left[\frac{|x_2|^2 - |x_1|^2 + |z|^2}{2|x_2\|z|} - i\frac{\alpha}{2|x_2\|z|}\right]|x_2| = |z|$$

$$x_1 = d_1|x_1|, x_2 = d_2|x_2|, z = d_3|z|$$

其中 $|d_j| = 1, j = 1,2,3$,则有

$$z = d_3|z| = e^{i\alpha}d_3|x_1| + e^{-i\beta}d_3|x_2| = e^{i\alpha}d_3\overline{D}_1x_1 + e^{-i\beta}d_3\overline{d}_2x_2 = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$|c_1| = |e^{i\alpha}d_3\overline{d}_1| = 1$$

$$|c_2| = |e^{-i\beta}d_3\overline{d}_2| = 1$$

情形 2($n\geqslant 3$),不妨设 $|x_1|\geqslant|x_2|\geqslant\cdots\geqslant|x_n|$,则(3)式即变为

$$\max[|x_1| - \sum_{j=2}^{n}|x_j|, 0] \leqslant |z| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|x_j|$$

设 k 是满足 $1\leqslant k\leqslant[\frac{n+1}{2}]$ 且 $0\leqslant\sum_{j=1}^{k}|x_j| - \sum_{j=k+1}^{n}|x_j|$ 的最小整数,既然 $|x_j|$ 随着 j 的增大而增大,这样的 k 必存在,设

$$\sum_{j=1}^{k}|x_j| - \sum_{j=k+1}^{n}|x_j| \leqslant |z|$$

则

$$\left|\sum_{j=1}^{k}|x_j| - \sum_{j=k+1}^{n}|x_j|\right| \leqslant |Z| \leqslant \sum_{j=1}^{k}|x_j| + \sum_{j=k+1}^{n}|x_j| \tag{4}$$

由情形 1 知存在 $c'_1, c'_2, |c'_j|', j = 1,2$,使得

$$z = c'_1\sum_{j=1}^{k}|x_j| + c'_2\sum_{j=k+1}^{n}|x_j|$$

从而 $z = \sum_{j=1}^{k}c_jx_j$, $|c_j| = 1$。

另一方面,若 $|z| < \sum_{j=1}^{k}|x_j| - \sum_{j=k+1}^{n}|x_j|$,那么在(4)中令 $k\geqslant 2$,再由 k 的定义,得

$$\sum_{j=1}^{k-1}|x_j| - \sum_{j=k}^{n}|x_j| < 0 \leqslant |z| < \sum_{j=1}^{k}|x_j| - \sum_{j=k+1}^{n}|x_j|$$

$$\sum_{j=1}^{k-1}|x_j| - |x_k| < |z| + \sum_{j=k+1}^{n}|x_j| < \sum_{j=1}^{k}|x_j| \tag{5}$$

不等式(5)的左边是非负的,因此由情形 1 知存在 $c'_1, c'_2, |c'_j| = 1, j = 1,2$

使 $|z| + \sum_{j=k+1}^{n}|x_j| = c'_1\sum_{j=1}^{k-1}|x_j| + c'_2|x_k|$

从而 $z = \sum_{j=1}^{n}c_jx_j, |c_j| = 1$ 证毕。

参考文献:

[1] 钟玉泉.复变函数论[M].北京:高等教育出版社,1994.

On the Generalization and Verification of Triangle Inequality

GUO Yu-feng

(Department of Basic Science Engineering of Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224003, PRC)

Abstract: Based on the complex number triangle inequality the thesis arrives at a new inequality and an exceptional case of n = 2, also a verification under general situation is put forward in the thesis.

Keywords: triangle inequality; exceptional case; verification

万方数据