试用导数法判断曲线的对称性*

左元斌
(盐城工学院 工商管理学院,江苏 盐城　224003)

摘　要:利用函数的奇偶性和导数的有关概念,推导了几个用导数的方法判断函数图象对称性的结论,并通过实例验证了这些结论对判断一般曲线的对称性是方便可行的。

关键词:导数; 判断; 曲线对称性
中图分类号:O174　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1008-5092(2001)01-0071-02

利用导数不仅可以研究函数的单调性和凹凸性,而且可以判断函数图象的对称性。本文试图通过几个结论的推导,介绍一种利用一阶导数或二阶导数是否是奇函数的方法,来判断和确定函数图象是否关于某一直线对称或关于某一点成中心对称。

定理 1　若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有意义,且一阶导函数存在,则函数 $f(x)$ 是偶函数的充要条件是:一阶导函数 $f'(x)$ 是奇函数[1]。

证明:

必要性:因为 $f(x)$ 是偶函数,且一阶导函数存在,所以 $f(-x)=f(x)$,而且 $f'(-x)=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{f(-x+\triangle x)-f(-x)}{\triangle x}=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{f(x-\triangle x)-f(-x)}{\triangle x}=-\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{f(x-\triangle x)-f(x)}{-\triangle x}$。令 $\triangle t=-\triangle x$,因为 $\triangle x\to 0$,所以 $\triangle t\to 0$。即 $f'(-x)=-\lim\limits_{\triangle t\to 0}\dfrac{f(x+\triangle t)-f(x)}{\triangle t}=-f'(x)$。所以导函数 $f'(x)$ 是奇函数,显然在 $x=0$ 时,$f'(0)=0$。

充分性:由一阶导函数 $f'(x)$ 是奇函数,知 $f'(x)=-f'(-x)$,两边取积分有

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=-\int f'(-x)\mathrm{d}x=\int f'(-x)\mathrm{d}(-x),\text{即} f(x)+C_1=f(-x)+C_2 \tag{1}$$

因为当 $x=0$ 时,函数 $f(x)$ 过点 $(0,f(0))$,所以(1)式有 $f(0)+C_1=f(0)+C_2$,即 $C_1=C_2$,从而(1)式得 $f(x)=f(-x)$,故函数 $f(x)$ 是偶函数。

定理 2　若函数 $f(x)$ 过点 $(0,0)$,且一阶导函数存在,则函数 $f(x)$ 是奇函数的充要条件是一阶导函数 $f'(x)$ 是偶函数。

证明　必要性证法同定理 1(略),现证充分性:由题设 $f'(x)$ 是偶函数,所以 $f'(-x)=f'(x)$,两边取积分

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int f'(-x)\mathrm{d}x=-\int f'(-x)\mathrm{d}(-x),\text{则} f(x)+C_1=-f(-x)+C_2 \tag{2}$$

因为 $f(x)$ 过点 $(0,0)$,所以当 $x=0$ 时,$f(x)=0$,代入(2)式有 $C_1=C_2$,此时对函数 $f(x)$ 恒有:$f(x)=-f(-x)$,故函数 $f(x)$ 是奇函数。

从定理 1 及其证明过程看出:导函数 $f'(x)$ 为奇函数时,它的原函数簇 $y=f(x)+C$ 都是偶函数;而定理 2 及其证明过程表明导函数 $f'(x)$ 为偶函数时,它的原函数簇中只有过点 $(0,0)$ 的一个原函数是奇函数,其余均不是奇函数,它们可由过点 $(0,0)$ 的奇函数 $y=f(x)$ 加任意常数而得到。从定理 1 和定理 2 的必要性我们还可得到如下两个推论:

---

* **收稿日期**:2001-01-09
作者简介:左元斌(1958-),男,江苏滨海县人,盐城工学院工商管理学院高级讲师。

推论 1 若函数 $f(x)$ 为偶函数且二阶导函数存在,则其二阶导函数 $f''(x)$ 也是偶函数。

推论 2 若函数 $f(x)$ 为奇函数且二阶导函数存在,则其二阶导函数 $f''(x)$ 也是奇函数。

作为以上结论 在判断一般函数 $y=f(x)$ 的图象对称性方面的应用,有如下二个判定定理:

定理 3 若曲线 $f(x)$ 的一阶导函数 $f'(x)$ 存在,则曲线 $f(x)$ 关于直线 $x=x_0$ 对称的充要条件为 $f_x'(t+x_0)$ 是关于 t 的奇函数,且 $t=0$ 时,$f_x'(x_0)=0$。

证明: 令 $T(t)=f(x)-f(x_0)$,$t=x-x_0$,则 $f(x)=T(t)+f(x_0)$,$x=t+x_0$,在以 $O'(x_0,f(x_0))$ 为原点的坐标系中,曲线 $f(x)$ 变为曲线 $T(t)=f(t+x_0)-f(x_0)$,且 $T(0)=0$。由定理 1 知,函数 $T(t)=f(t+x_0)-f(x_0)$ 是 t 的偶函数(图象关于 $t=0$ 对称)的充要条件是其导函数:$T_t'=f_x'(t+x_0)(t+x_0)'_t=f_x'(t+x_0)$ 是 t 的奇函数,且 $t=0$ 时,$T'(0)=f_x'(x_0)=0$。即函数 $f(x)$ 关于直线 $x=x_0$ 对称的充要条件为 $f_x'(t+x_0)$ 是关于 t 的奇函数,且 $t=0$ 时,$f_x'(x_0)=0$。

定理 4 若函数 $f(x)$ 的二阶导函数 $f''(x)$ 存在,则曲线 $f(x)$ 关于点 $(x_0,f(x_0))$ 成中心对称的充要条件为 $f_x''(t+x_0)$ 是关于 t 的奇函数,且 $t=0$ 时,$f_x''(x_0)=0$。

证明: 令 $T(t)=f(x)-f(x_0)$,$t=x-x_0$,则 $f(x)=T(t)+f(x_0)$,$x=t+x_0$,即在以 $O'(x_0,f(x_0))$ 为原点的坐标系中,曲线 $f(x)$ 变为曲线 $T(t)=f(t+x_0)-f(x_0)$,当 $t=0$ 时,$T(0)=0$,即函数 $T(t)$ 过点 $O'(0,0)$。因为 $T_t'=f_x'(t+x_0)(t+x_0)'_t=f_x'(t+x_0)$,而 $T_t''=f_x''(t+x_0)(t+x_0)'_t=f_x''(t+x_0)$。由定理 2 知,函数 $T(t)=f(t+x_0)-f(x_0)$ 是奇函数(曲线 $T(t)$ 关于点 $O'(0,0)$ 成中心对称)的充要条件是 $T'(t)$ 为偶函数,再由定理 1 知,$T'(t)$ 为偶函数的充要条件是 $T''(t)=f_x''(t+x_0)$ 为 t 的奇函数,且 $t=0$ 时,$T''(0)=f_x''(x_0)=0$,因此曲线 $f(x)$ 关于点 $(x_0,f(x_0))$ 成中心对称的充要条件为 $f_x''(t+x_0)$ 是关于 t 的奇函数,且 $f_x''(x_0)=0$。

根据定理 3 和定理 4 的结论,在函数 $y=f(x)$ 的一阶导数或二阶导数存在的条件下,要判断一个一般的曲线 $y=f(x)$ 是否关于直线 $x=x_0$ 对称,只要令 $f'(x)=0$,解得 x_0,再把 $x=t+x_0$ 代入 $f'(x)$ 得 $f_x'(t+x_0)$,看 $f_x'(t+x_0)$ 是否是 t 的奇函数:如果是,则曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=x_0$ 对称,否则曲线 $y=f(x)$ 不关于直线 $x=x_0$ 对称。

同样地,要判断一条曲线 $y=f(x)$ 是否关于其曲线上某一点成中心对称,只要令 $f''(x)=0$,解得 x_0,再把 $x=t+x_0$ 代入 $f''(x)$ 得 $f_x''(t+x_0)$,如果 $f_x''(t+x_0)$ 是 t 的奇函数,则曲线 $y=f(x)$ 关于点 $(x_0,f(x_0))$ 成中心对称,否则曲线 $y=f(x)$ 不关于点 $(x_0,f(x_0))$ 成中心对称。

例 1 若 μ,σ 是两个常数,试判断函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 的对称性。

解 $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}(x-\mu)e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,令 $f'(x)=0$,解得 $x_0=\mu$,以 $x=t+\mu$ 代入 $f'(x)$,得 $f'(x)=f'(t+\mu)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}te^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$,因为该式是关于 t 的奇函数,所以函数 $f(x)$ 关于直线 $x=\mu$ 对称。

注:例 1 所给出的函数为正态密度函数,以上解法可通过中学数学平移坐标的方法加以验证,它的图象可参阅[2]魏宗舒编著的概率论与数理统计教程 $P115$ 页。

例 2 试讨论三次曲线 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 的对称性。

解: $f'(x)=3a_3x^2+2a_2x+a_1$,$f''(x)=6a_3x+2a_2$。曲线不具有轴对称性,讨论略。

令 $f''(x)=0$ 得 $x_0=-\frac{a_2}{3a_3}$,以 $x=t+x_0=t-\frac{a_2}{3a_3}$ 代入 $f''(x)$,得 $f''(x)=6a_3(t-\frac{a_2}{3a_3})+2a_2=6a_3t$,

该式是 t 的奇函数,所以曲线 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 关于点 $(-\frac{a_2}{3a_3},f(-\frac{a_2}{3a_3}))$ 成中心对称性。

结论 在函数 $y=f(x)$ 可导的条件下,利用一阶导数或二阶导数是否是奇函数的方法,来判断和确定函数图象的对称性是方便可行的,$f_x'(t+x_0)$ 和 $f_x''(t+x_0)$ 分别可以做函数 $y=f(x)$ 关于直线对称和中心对称的判断式,其中 x_0 是使 $f_x'(t+x_0)=0$ 或 $f_x''(t+x_0)=0$ 的数。 (下转第 78 页)

制作出数学方程式、数组等各种复杂的数学式子；利用 ACD/chemsketch 工具可绘制化学工程式、反应式与各种化学反应图表。

4.6 利用 Internet 上的资源

Internet 上的信息资源是一个巨大的金矿，有条件的教师可通过它搜索下载信息，使我们的课件制作少走弯路，提高档次。如美国的数学教育站点（http:"www.math.arizona.edu/azmath）中的数学教学课件资料琳琅满目，让人大开眼界。

5 结语

以上制作 CAI 课件的方法，根据教学内容，制作者的兴趣爱好，制作的设备和所占有的素材的情况不同，还会有其它的表现形式。如能注意尝试使用，灵活掌握，不仅能使您的课件制作变得得心应手，也可以使得课堂教学效果大大提高。

参考文献：

[1] 王天镪.课堂教学用 CAI 课件的设计方法[J].中国电化教育，2000，(5)：46.
[2] 王曙燕.交互式多媒体 CAI 系统的制作[J].电化教育研究，2000，(5)：32～33.

Elementary Introduction to Making CAI

TANG Pei－liu[1]，MA Fei-yu[2]

(1.Funing Normd School Jiangsu Province，Jiangsu Funing 224400，PRC；2.Architecture Designing and Research institute of Yancheng Institute of Technology，Jiangsu Yancheng 224003，PRC)

Abstract：In order to bring thd advantages of CAI into play in teaching，the maker should do a lot of preparations for a piece of eleborate CAI schoolwork. At first，the maker should complete the CAI script acoording to the teaching requirements. And then choose an appropriate tool，design the model and so on to raise working efficiency At last，the maker should gather material for the CAI，as much as possible In this way，the CAI schoolwork can be used more usefully for class teaching.

Keywords：CAI； schoolwork； a way of making CAI

（上接第 72 页）

参考文献：

[1] 王世安.数学练习册[M].上海：高等教育出版社，1997.
[2] 魏宗舒.概率论与数理统计教程[M].北京：高等教育出版社，1990.
[3] 刘玉琏，傅沛仁.数学分析[M].北京：高等教育出版社，1989.

To Deduce The Symmetry of Curve by Derivative Method

ZUO Yuan-bin

(Industrial and Commercial management college of Yancheng Institute of Technology，Jiangsu Yancheng 224003，PRC)

Abstract：With the relevant concepts about parity of function and derivative，the paper is designed to deduce several conclusions that can measure the symmetry of general curve by derivative method，and test and verify these conclusions are convenient and workable through living examples.

Keywords：derivative； measure； symmetry of curve