

非对称广义特征值问题并行处理的一些进展*

薛长峰

(盐城工学院 基础部, 江苏 盐城 224003)

摘 要 广义特征值问题 $AX = \lambda BX$ (A, B 是 N 阶方矩阵) 的并行处理是大规模科学与工程计算中的基础问题之一。迄今为止, 国内外学者对该问题的研究多集中于对称矩阵广义特征值问题的并行处理, 并形成多种算法和相应软件。而非对称矩阵广义特征值问题并行处理的研究相对进行得较少。介绍作者等人近几年来在非对称广义特征值问题并行处理方面的一些工作。它包括: QZ 算法的并行化, 并行拟-Eberlein 算法及并行同伦数值方法等。

关键词 并行处理; 非对称矩阵; 广义特征值

中图分类号: O241.0342 文献标识码: A

文章编号: 1671-532X(2002)01-0021-03

广义特征值问题的并行处理在大规模科学与工程计算中占有重要地位。近 10 多年来, 该问题的研究已引起国内外学者的普遍重视。“八五”期间, 周树荃、邓绍忠、曾岚等人结合“银河”系列和“神州”系列对对称矩阵广义特征值问题的并行处理进行了系统而又深入的研究。他们的工作包括: 并行子空间迭代法^[1], 并行保域行列式查找法^[2], 并行保域多分法^[3], 并行 EBE 子空间迭代法^[4], 并行 EBE 向量迭代法^[5]和并行 EBE-Lanczos 方法^[6]。“九五”期间, 在周树荃教授的领导下, 作者等人结合国内的“Challenge L”并行系统和“Parallel 95”并行系统对非对称广义特征值问题的并行处理进行了一些研究。本文主要介绍作者等人在这方面的一些工作。第 1 节介绍 QZ 算法的并行处理, 第 2 节介绍拟-Eberlein 算法的并行处理, 第 3 节则介绍并行连续同伦算法和并行同伦-行列式算法。

1 QZ 算法的并行处理

QZ 算法 1973 年由 C. B. Moler 和 G. W. Stewart 提出来的, 它是公认的计算非对称广义特征值问题 $AX = \lambda BX$ (A, B 为实矩阵) 的有效串行算法, 我们对 QZ 算法作了并行化处理, QZ 算法的并行化包括约化过程的并行化和迭代过程的并行化, 下

面予以介绍。

1.1 约化过程

(1) 并行计算 $Q_1 A = A_1, Q_2 A_1 = A_2, \dots, Q_{n-1} A_{n-2} = A_{n-1} = A'$,

$Q_1 B = B_1, Q_2 B_1 = B_2, \dots, Q_{n-1} B_{n-2} = B_{n-1} = B'$ 。

(2) 对 $k = 1, 2, \dots, n-2$ 进行以下运算:

a. 选择 Q_k' 去零化 $a'_{k+1,k}, a'_{k+3,k}, \dots, a'_{n,k}$;

b. 并行计算 $Q_k' B = B'', Q_k' A = A''$;

c. 用 $Z = Z_n \dots Z_{k+2}$ 右乘 B'' 将 B'' 恢复为上三角阵。

d. 计算 $A''Z, B''Z$ 。

1.2 迭代过程

对 $A_k, B_k, k = 1, 2, \dots, A_1 = A, B_1 = B$,

(1) 选择原点位移序列 $\{\tau_k\}, k = 1, 2, \dots$

(2) 选取 Q_k , 使 $S_k = Q_k(A_k - \tau_k B_k)$ 为上三角阵。

(3) 选取 Z_k , 使 $B_{k+1} = Q_k B_k Z_k$ 为上三角阵。

(4) 计算 $A_{k+1} = \tau_k B_{k+1} + S_k Z_k$

(5) 收缩

在并行 QZ 算法^[7]的实际实施过程中, 我们主要考虑了约化过程的并行化和迭代过程收缩时的并行化, 在约化过程中我们将第 2 步中 a 部分

* 收稿日期: 2001-09-12

作者简介: 薛长峰 (1966-) 男, 江苏建湖县人, 盐城工学院讲师, 理学硕士。

的运算作适当的合并,这样做是为了加大第 2 步 b 部分矩阵的运算量,从而有利于 b 部分的并行运算。对 512 阶和 640 阶的随机稠密矩阵对 (A, B) , Challenge L 并行系统上的数值试验结果表明:当处理机台数为 2 和 4 时,并行 QZ 算法的效率尚好。但当处理机台数为 8 时,并行 QZ 算法的效率不高。

2 拟-Eberlein 算法的并行处理

1985 年和 1987 年 G. W. Stewart^[8]和 P. J. Eberlein^[9]分别著文研究非 Hermite 矩阵的标准特征值问题的并行拟-Jacobi 算法。1989 年 J. P. Charlier 和 P. Van Doore^[10]以文^[8]的工作为基础,提出求解非对称广义特征值问题的并行拟-Jacobi 算法(简称 C-V 算法),我们以文^[9]的工作为基础,提出求解非对称广义特征值问题的并行拟-Eberlein 算法^[11],下面对串行拟-Eberlein 算法及其并行化予以介绍。

2.1 串行拟-Eberlein 算法

$A, B \in C_{n \times n}, \epsilon \in (0, +\infty)$

起始: $U = I, V = I$

对 $k = 1, 2, \dots, n-1, l = k+1, k+2, \dots, n$

如果 $\max\{|a_{lk}|, |b_{lk}|\} > \epsilon$

计算内旋转 $G_k(p, q), G_k(c, s)$

计算 $A = G_k^H(p, q)AG_k(c, s)$

$B = G_k^H(p, q)BG_k(c, s)$

$C = VG_k(p, q), V = VG_k(c, s)$

最终 $A - \lambda B = V^H(T - \lambda S)V, T, S$ 为上三角阵。

2.2 并行拟-Eberlein 算法:

A. 主元对的选取

第一步为 $(1, 2)(3, 4) \dots (n-1, n)$ 以下的 $n-2$ 步按映射 $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 6, \dots, n \rightarrow n-1, n-1 \rightarrow n-3, 7 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2$ 来组织。

B. 单个时间区间步的计算

设第 k 个时间区间步的主元对为 $(K_1, L_1), (K_2, L_2) \dots (K_N, L_N)$

(1) 同时计算

$Q(K_1, L_1), Q(K_2, L_2) \dots Q(K_N, L_N)$

$Z(K_1, L_1), Z(K_2, L_2) \dots Z(K_N, L_N)$

(2) 同时计算

$AQ(K_1, L_1), AQ(K_2, L_2) \dots AQ(K_N, L_N)$

$BZ(K_1, L_1), BZ(K_2, L_2) \dots BZ(K_N, L_N)$

(3) 并行组装

$AQ(K_1, L_1) \dots Q(K_2, L_2) \dots Q(K_N, L_N) = A'$

$BZ(K_1, L_1), Z(K_2, L_2) \dots Z(K_N, L_N) = B'$

(4) 同时计算

$Q^H(K_1, L_1)A', Q^H(K_2, L_2)A' \dots Q^H(K_N, L_N)A'$

$Z^H(K_1, L_1)B', Z^H(K_2, L_2)B' \dots Z^H(K_N, L_N)B'$

(5) 并行组装 $Q^H(K_N, L_N) \dots Q^H(K_1, L_1)A'$

$Z^H(K_N, L_N) \dots Z^H(K_1, L_1)B'$

当一个时间区间步的运算全部完成以后,则转入到下一个时间区间步进行运算。

对阶数为 640 的随机稠密矩阵对 (A, B) , Challenge L 并行系统上的数值试验结果表明:并行拟-Eberlein 算法具有并行效率高(当处理机台数为 4 和 8 时并行效率分别为 89.08% 和 83.88%)和收敛速度快(同 C-V 算法相比)的特点。

3 并行同伦数值方法

同伦方法是 70 年代开始发展起来的求解非线性问题的数值方法。由于它具有内蕴并行性和大范围收敛的特点,因而容易实施并行计算。同伦方法用于代数特征值问题的研究始于 80 年代中期,而该方法的并行化处理则始于 91 年^[12],其后国外在这方面的工作主要集中在对称矩阵的标准特征值问题。而在近几年我们则将同伦方法用于非对称广义特征值问题的并行处理上,提出了并行连续同伦算法^[13]和并行同伦行列式算法^[14]下面予以介绍。

3.1 并行连续同伦算法

Step1 用 p 台处理机分别求子问题 $A_{11}X = \lambda B_{11}X, A_{22}X = \lambda B_{22}X, \dots, A_{pp}X = \lambda B_{pp}X$ 的所有特征值(可分别执行串行 QZ 算法)这样也求出了 $DX = \lambda BX$ 的所有特征值。

Step2 对已求出的 $DX = \lambda BX$ 的特征值分 p 类用 p 台处理机分别进行反迭代求出其相应的特征向量。反迭代的公式为:

$$r^{(k)} \in R^n, \text{ 对 } k = 1, 2, \dots$$

$$\text{解方程组 } (D - \mu B) v^{(k)} = B r^{(k-1)}, r^{(k)} = \frac{v^{(k)}}{\|v^{(k)}\|_\infty}$$

Step3 以第 1, 2 步中求出的 $DX = \lambda BX$ 的特征对及 $t = 0$ 作为初始点,分 p 类用 p 台处理机分别执行追踪算法(追踪算法见文^[13])直至求出 $AX = \lambda BX$ 特征对。

3.2 并行同伦-行列式算法

Step1 求出 $DX = \lambda BX$ 的特征值(D 为初始矩阵), 可将此问题分成 p 个子问题 $A_{11}X = \lambda B_{11}X$, $A_{22}X = \lambda B_{22}X$, ..., $A_{pp}X = \lambda B_{pp}X$, 用 p 台处理机对 p 个子问题对应执行 QZ 算法, 从而求出 $DX = \lambda BX$ 的特征值。

Step2 以第 1 步中求出的 $DX = \lambda BX$ 的特征值以及 $t = 0$ 为初始点, 分 p 类分别进行同伦曲线追踪(追踪算法见文^[14])直至求出 $AX = \lambda BX$ 的特征值。

这两种算法都在 Challenge L 多处理机系统上进行试算, 对于 1024 阶的随机矩阵对(A, B), 当使用 2 台 A 台和 8 台处理机时, 这两种算法的参考文献:

- [1] 曾岚, 周树荃. 并行子空间迭代法[A]. 萧树铁, 蔡大用. 中国工业与应用数学学会第三次大会论文集[C]. 北京: 清华大学出版社, 1994. 704 - 708.
- [2] 周树荃, 曾岚. 求解广义特征值问题的并行保域行列式查找法[J]. 南京航空航天大学学报, 1995, 27(2): 147 - 155.
- [3] Zeng Lan, Zhou Shuquan. Parallel regionpreserving multisection method for solving generalized eigenproblem[C]. International Conference On Parallel Algorithms, 1995, Wuhan, China.
- [4] 周树荃, 邓绍忠. 广义特征值问题的 EBE-Lanczos 并行算法[J]. 工程力学, 1995, 12(1): 116 - 122.
- [5] 邓绍忠, 周树荃. 广义特征值问题的并行 EBE 向量迭代法[J]. 计算结构力学及其应用, 1994, 11(4): 401 - 407.
- [6] 邓绍忠, 周树荃. 大型结构特征值问题的并行 EBE 子空间迭代法[J]. 南京航空航天大学学报, 1994, 26(5): 575 - 581.
- [7] 周树荃, 薛长峰. 非对称广义特征值问题的并行 QZ 算法[A]. 曾庆存, 李大潜. 中国工业与应用数学第四次大会论文集[C]. 上海: 复旦大学出版社, 1996. 497 - 498.
- [8] G. W. Stewart. A Jacobi-like algorithm for computing the schur decomposition of a nonhermitian matrix[J]. SIAM. Sci. Stat. Comput. 1985, 853 - 864.
- [9] P. J. Eberlein. On the schur decomposition of a matrix for parallel somputation[J]. IEEE. Trans. Comp. 1987, C-36(2): 167 - 174.
- [10] J. P. Charlier, P. Van. Dooren. Jacobi-like algorithm for computing the generalized schur form of a regular pencil[J]. Comp. and Appl. Math. 1989, 27: 17 - 36.
- [11] 薛长峰, 周树荃. 非对称广义特征值问题的拟-Eberlein 算法及其并行化[J]. 南京航空航天大学学报, 1999, 31(4): 422 - 427.
- [12] T. Y. Li, Hong Zhong, X. H. Sun. Parallel homotopy algorithm for the symmetric tridiagonal eigenvalue problem[J]. SIAM. Sci. Stat. Comp. 1991, 12(3): 469 - 487.
- [13] 薛长峰, 周树荃. 非对称广义特征值问题的并行连续同伦算法[J]. 计算物理, 1997, 14(4-5): 619 - 621.
- [14] 薛长峰, 周树荃. 非对称广义特征值问题的并行同伦-行列式算法[J]. 数值计算与计算机应用, 1999, 20(3): 161 - 166.

Some progress of the parallel processing for nonsymmetric generalized eigenvalue problem

XUE Chang-feng

(Department of Basic Science of Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224003, China)

Abstract Parallel processing for generalized eigenvalue problem is one of the fundamental problems in computation science and engineering. The study of this problem has received considerable attention. So far there are very much study of parallel processing for symmetric matrix generalized eigenvalue problem and there are very little study of parallel processing for nonsymmetric matrix generalized eigenvalue problem. In this paper we introduce mainly our work on parallel processing for nonsymmetric matrix generalized eigenvalue problem. It includes parallel QZ algorithm, parallel Eberlein-like algorithm and parallel homotopy numerical method.

Keywords Parallel processing; Nonsymmetric matrix; Generalized eigenvalue problem

万方数据

行效率都分别超过了 98%, 91% 和 85%, 它表明并行连续同伦算法和并行同伦-行列式算法高度的并行性。

4 结语

以上简单介绍了我们在非对称广义特征值问题并行处理方面的一些工作, 上述算法都是在具有共享存储的 Challenge L 并行系统上实现的。由于某些原因, 上述算法未曾在分布式并行系统上试算, 另外, 各种算法相应程序的进一步优化, 以及其它一些求解非对称广义特征值问题的高效并行算法都有待我们作进一步的研究和探索。

谨以此文纪念周树荃教授。