广义罗尔定理及应用*

刘　勇
(扬州大学 理学院,江苏 扬州　225009)

摘　要:给出了罗尔定理的广义形式,将其推广到任意区间、任意端值上,讨论了两例特殊函数的零点。

关键词:罗尔定理;广义罗尔定理;零点
中图分类号:O172　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-5322(2002)03-0074-02

罗尔定理是微分学中的一个基本定理,它基于费尔玛定理。由罗尔定理可导出著名的拉格朗日中值定理[1~3]。本文将罗尔定理推广到任意区间和任意端值上,并利用罗尔定理的广义形式讨论了两例特殊函数的零点。

1　基本定理

以下的四个定理是共知的。

定理 1　(Fermat 定理)

若 $f(x)$ 在某区间内点 c 处达到极值,且 $f'(c)$ 存在,则 $f'(c)=0$

定理 2　(Rolle 定理)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 上可导,且 $f(a)=f(b)$,则必存在一点 $c\in(a,b)$ 满足 $f'(c)=0$

定理 3　(Lagrange 定理)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 上可导,则必存在一点 $c\in(a,b)$ 满足 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

定理 4　(Darboux 定理)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,且 $f'(a)\cdot f'(b)<0$,则必存在一点 $c\in(a,b)$ 满足 $f'(c)=0$

由定理 4 可得到如下的推论:

推论 1　若 $f(x)$ 在区间 I 上可导,且 $f'(x)$ 处处不为 0,则 $f'(x)$ 在 I 上保持同号。

2　广义罗尔定理

在本节中给出任意区间、任意端值上的广义罗尔定理,主要有以下的一些结果。

结论 1　若 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导,且 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to b-}f(x)$,则存在 $c\in(a,b)$ 满足 $f'(c)=0$。

证明:设对任意 $x\in(a,b)$,$f'(x)\neq0$,则由推论 1 知 $f'(x)$ 在 (a,b) 上同号,不妨设 $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在 (a,b) 上严格单调增加,这与 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to b-}f(x)$ 矛盾,故存在 $c\in(a,b)$ 满足 $f'(c)=0$。

结论 2　若 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导,且 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,则存在 $c\in(a,+\infty)$ 满足 $f'(c)=0$

结论 3　若 $f(x)$ 在 $(-\infty,b)$ 上可导,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to b-}f(x)$,则存在 $c\in(-\infty,b)$ 满足 $f'(c)=0$

结论 4　若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,则存在 $c\in(-\infty,+\infty)$ 满足 $f'(c)=0$

结论 5　若 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导,且 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to b-}f(x)=+\infty$ (或 $-\infty$),则存在 $c\in(a,b)$ 满足 $f'(c)=0$

结论 6　若 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导,且 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (或 $-\infty$),则存在 $c\in(a,b)$ 满足 $f'(c)=0$

结论 7　若 $f(x)$ 在 $(-\infty,b)$ 上可导,且

* 收稿日期:2002-06-23
作者简介:刘　勇(1973-),男,江苏响水县人,扬州大学硕士研究生,助教。

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to b-}f(x)=+\infty$(或 $-\infty$),则存在 $c\in(\infty,b)$满足 $f'(c)=0$

结论 8　若 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$(或 $-\infty$),则存在 $c\in(a,b)$满足 $f'(c)=0$

结论 2、3、4、5、6、7、8 的证明同结论 1 类似。

结论 9　若 $f(x)$在(a,b)上可导,且 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$(或 $\lim\limits_{x\to b-}f(x)$)不存在,则 $f'(x)$在(a,b)上必有无穷多个零点。

证明 :不妨设 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$不存在,对任意 $c\in(a,b)$,设在区间(a,c)上 $f'(x)\neq0$,则 $f'(x)$在区间(a,c)上同号,不妨设 $f'(x)>0$,则 $f(x)$在区间(a,c)上为增函数,因而 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$必存在,这与已知矛盾,故在区间$(a,c)$上必存在 c_1 满足 $f'(c_1)=0$,对区间(a,c_1)施以同样的过程知存在 $c_2\in(a,c_1)$满足 $f'(c_2)=0$,重复上述过程,则必存在序列 c_n,$n=1,2,\cdots$,$c_n\to a$,且 $f'(c_n)=0$,于是结论得证。

结论 10　若 $f(x)$在(a,b)上可导,且 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$(或 $\lim\limits_{x\to b-}f(x)$)不存在,则对任意实数 r,存在无穷多个 $x_n\in(a,b)$,满足 $f'(x_n)=r$

证明 构造函数 $g(x)=f(x)-rx$,对 $g(x)$利用结论 9 可得结论 10。

3　应用

举二例说明上述结论的应用。

例 1　设 $g(x)$在$(0,+\infty)$上可导,且知 $0\leqslant g(x)\leqslant\frac{x}{1+x^2}$　$0\leqslant x\leqslant+\infty$,$h(x)=g'(x)-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,则 $h(x)$在$(0,+\infty)$上至少有一个零点。

证明 :引入 $f(x)=g(x)-\frac{x}{1+x^2}$,显然 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,且 $f'(x)=h(x)$,由结论 2 知 :必存在 $c\in(0,+\infty)$满足 $f'(c)=0$,即 $h(x)$在$(0,+\infty)$上至少有一个零点。

例 2　设 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$,则对任意正整数 n,$f^{(n)}(x)$在$(0,1)$上存在无穷多个零点。

证明 :由于 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)$不存在,故 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)$不存在,类似地,$\lim\limits_{x\to0+}f^{(n-1)}(x)$不存在,由结论 9 知 $f^{(n)}(x)$在$(0,1)$上有无穷多个零点。

参考文献 :

[1] 菲赫金哥尔茨.微积分学教程[M].北京 :人民教育出版社,1956.
[2] 北京大学.数学分析[M].北京 :人民教育出版社,1961.
[3] 复旦大学数学系.数学分析[M].北京 :高等教育出版社,1983.

The generalized rolle theorem and it 's application

LIU Yong
(Department of Mathematics of Yangzhou University,Jiangsu Yangzhou　225009,China)

Abstract :In this paper the generalized rolle theorem is presented and the zero of two special functions are studied.

Keywords :Rolle theorem ; Generalized rolle theorem ; zero