

模糊赋范空间中凸锥的若干性质及两个相关命题的证明*

葛玉凤

(盐城工学院 基础部,江苏 盐城 224003)

摘 要:在模糊赋范空间的背景上,得到了模糊凸锥的若干性质,同时,还给出了模糊赋范空间中两个相关命题的证明。

关键词:模糊凸锥;线性空间;模糊赋范空间

中图分类号:O159

文献标识码:A

文章编号:1671-532X(2002)04-0066-04

模糊凸锥是模糊集理论中的一个重要概念,正如 Zadeh 在其奠基性文章中所指出,这方面的研究与模式识别与优化问题密切相关,本文在文献[1]中所引进的模糊赋范空间的背景上,利用相重概念得到了模糊凸锥的若干性质。其次还给出了模糊赋范空间中两个相关命题的证明。

本文中 X 表通常线性空间,仅在点 $x \in X$ 取值为 $\alpha \in (0, 1]$,而在其余点处取值为 0 的 Fuzzy 集称为 Fuzzy 点,记为 x_α , X 中所有 Fuzzy 点组成的集用 $\tilde{X}$ 表示,设 A 为 X 中的 Fuzzy 集,则若 $A(x) > 1 - \alpha$,则称 Fuzzy 点 x_α 重于 A ,记作 $x_\alpha \tilde{\in} A$,若 $A(x) \geq \alpha$,称 Fuzzy 点 x_α 属于 A ,记为 $x_\alpha \in A$ [2]。

为讨论的方便,现将本文要用到的文献[1]中的有关概念与结果简述如下:

定义 1 [1] 设 X 为线性空间,对每一 $x_\alpha \in \tilde{X}$,有一非负实数,记作 $\|\tilde{x}_\alpha\|$ 与之对应,且满足:

- (1) $\|\tilde{x}_\alpha\| = 0$, 当且仅当 $x = \theta$;
- (2) $\|\tilde{kx}_\alpha\| = |k| \|\tilde{x}_\alpha\|, k \in x$;
- (3) $\|\widetilde{x_\alpha + y_\alpha}\| \leq \|\tilde{x}_\alpha\| + \|\tilde{y}_\alpha\|$;
- (4) 当 $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$ 时, $\|\tilde{x}_\alpha\| \leq \|\tilde{x}_\beta\|$;
- (5) 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $0 < \delta(\varepsilon, x_\alpha) < \alpha$, 使

$\|\tilde{x}_{\alpha-\delta}\| < \|\tilde{x}_\alpha\| + \varepsilon$, 则称 $(X, \|\tilde{\cdot}\|)$ 为 Fuzzy 赋范空间。 $\|\tilde{\cdot}\|$ 称为 X 上的 Fuzzy 范数。将 Fuzzy 范数 $\|\tilde{\cdot}\|$ 记为 $\|\cdot\|$ 。

定义 2 [1] 设 (X, T) 为 Fuzzy 拓扑线性空间,若存在 Fuzzy 集族 $u = \{U\}$, 使对任何 $\lambda \in (0, 1]$, 任取 $0 < \varepsilon_\lambda^{(n)} < \lambda, \varepsilon_\lambda^{(n)} \downarrow 0, u_\lambda = \{U \cap (1 - \lambda + \varepsilon_\lambda^{(n)}) * \mid U \in u, n = 1, 2, \dots\}$ 为 θ_λ 的重域基,则称 (X, T) 为 (QL) 型 Fuzzy 拓扑线性空间,而 $u = \{U\}$ 称为基坯,其中 μ^* 表示 X 上取值为 μ 的常值 Fuzzy 集。

文[1]一个重要的基本定理为

定理 1 [1] Fuzzy 赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 是分离(即 Hausdorff)的 (QL) 型拓扑线性空间,且对任一给定的 $x \in X$ 及 $\varepsilon > 0$, 记 $\mathcal{A}(x, \varepsilon) = \{\alpha \mid \|x_\alpha\| < \varepsilon\}$, 令

$$U_\varepsilon(x) = \begin{cases} \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(x, \varepsilon)} (1 - \alpha) & \mathcal{A}(x, \varepsilon) \neq \phi \\ 0 & \mathcal{A}(x, \varepsilon) = \phi \end{cases} \quad (1)$$

则易证 $x_\alpha \tilde{\in} U_\varepsilon(x) \Leftrightarrow \|x_\alpha\| < \varepsilon$, 而且 $u = \{U_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ 为其基坯。

下面我们先给出 X 上 Fuzzy 集 A 为 X 上 Fuzzy 凸锥的几个充要条件,然后证明 Fuzzy 凸锥的几个重要性质。

命题 1 A 为 X 上 Fuzzy 凸锥的充要条件为下列三个条件之一:

- (1) 对任何 $x_\alpha, y_\beta \in A, \alpha \geq \beta$, 及任何 $a > 0, b > 0$, 有 $ax_\alpha + by_\alpha \in A$ 。
- (2) 对任何 $x_\alpha, y_\beta \in A, \alpha \geq \beta$, 及任何 $a > 0, b > 0$, 有 $ax_\beta + by_\beta \in A$ 。

(3) 对任何 $a > 0, b > 0, \alpha A + bA \subset A$.

关于条件(1)的证明:

必要性 设 $x_\alpha, y_\beta \in A, \alpha \geq \beta$, 则 $A(x) > 1 - \alpha, A(y) > 1 - \beta \geq 1 - \alpha$, 又因 A 为 Fuzzy 凸锥, 故 $\forall a > 0, b > 0, A(ax + by) \geq \min\{A(x), A(y)\} > 1 - \alpha$, 从而 $ax_\alpha + by_\beta \in A$.

充分性 设对任意 $x, y \in X$ 及任意 $a > 0, b > 0$, 有

$$A(ax + by) < \min\{A(x), A(y)\}$$

则可找到 α, β 满足 $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, \alpha \geq \beta$, 使 $A(ax + by) < 1 - \alpha \leq 1 - \beta < \min\{A(x), A(y)\}$

从而 $A(x) > 1 - \alpha, A(y) > 1 - \beta$ 即 $x_\alpha \in A, y_\beta \in A$, 由充分性条件即有 $ax_\alpha + by_\beta \in A$, 故得 $A(ax + by) > 1 - \alpha$, 而这与 $A(ax + by) < 1 - \alpha$ 矛盾.

条件(2)的证明与(1)类似, 从略.

关于条件(3)的证明:

必要性 $\forall z_\alpha \in aA + bA$, 则有

$$(aA + bA)z = \sup_{z=x+y} \min\{aA(x), bA(y)\} =$$

$$\sup_{z=x+y} \min\{A(\frac{x}{a}), A(\frac{y}{b})\} > 1 - \alpha$$

由 A 为 Fuzzy 凸锥, 故

$$\min = \{A(\frac{x}{a}), A(\frac{y}{b})\} \leq A(a \cdot \frac{x}{a} + b \cdot \frac{y}{b}) = A(x + y) = A(z)$$

$$\text{从而 } A(z) \geq \sup_{z=x+y} \min\{A(\frac{x}{a}), A(\frac{y}{b})\} > 1 - \alpha$$

即 $z_\alpha \in A$, 所以 $aA + bA \subset A$

充分性 对任意 $x_\alpha, y_\beta \in A, \alpha \geq \beta$, 则明显有 $y_\alpha \in A$, 从而有 $ax_\alpha + by_\alpha \in aA + bA \subset A$, 由(1)得 A 为 Fuzzy 凸锥.

以下我们给出 X 上 Fuzzy 凸锥的一些性质, 为此, 先给出如下 2 个引理.

引理 1 设 C, B, A 为 X 中 Fuzzy 集, 且 $B \subset A, C \subset A$, 则对任何 $a > 0, b > 0$

$$aB + aC \subset aA + bA$$

证明简单从略.

引理 2 设 A, B 为 X 中 Fuzzy 凸锥, 则 $\forall z_\lambda \in A + B \Leftrightarrow$ 存在

$$x, y \in X, x + y = z \text{ 有 } x_\lambda \in A, y_\lambda \in B.$$

证: $\forall z_\lambda \in A + B \Leftrightarrow (A + B)z = \sup_{z=x+y} \min\{A(x), B(y)\} > 1 - \lambda \Leftrightarrow$

存在 $x, y \in X, x + y = z$ 有 $A(x) > 1 - \lambda, B(y) > 1 - \lambda \Leftrightarrow$

存在 $x, y \in X, x + y = z, x_\lambda \in A, y_\lambda \in B$.

性质 1 设 $A_i (i \in I)$ 都是 X 中的 Fuzzy 凸锥, 则 $\bigcap_{i \in I} A_i$ 为 X 中 Fuzzy 凸锥.

证: $\forall x_\alpha, y_\beta \in \bigcap_{i \in I} A_i (\alpha \geq \beta) \Rightarrow x_\alpha, y_\beta \in A_i, \forall i \in I$

$\Rightarrow$ 对任何 $a > 0, b > 0, ax_\beta + by_\beta \in A_i, \forall i \in I$ (见命题 1(2))

$\Rightarrow ax_\beta + by_\beta \in \bigcap_{i \in I} A_i$ 由命题 1(2)得 $\bigcap_{i \in I} A_i$ 为 Fuzzy 凸锥.

性质 2 设 A, B 为 X 中 Fuzzy 凸锥, 则 $A + B$ 为 X 中 Fuzzy 凸锥.

证: $\forall x_\alpha, y_\beta \in A + B (\alpha \geq \beta)$ 由引理 2

$\Rightarrow$ 存在 $x_1, x_2 \in X, x_1 + x_2 = x$, 有 $(x_1)_\alpha \in A, (x_2)_\alpha \in B$, 且存在 $y_1, y_2 \in X, y_1 + y_2 = y$ 有 $(y_1)_\beta \in A, (y_2)_\beta \in B$

由命题 1(1) $\Rightarrow$ 对任何 $a > 0, b > 0$,

$$a(x_1)_\alpha + b(y_1)_\alpha \in A, a(x_2)_\alpha + b(y_2)_\alpha \in B$$

$$\text{由引理 2} \Rightarrow ax_\alpha + by_\alpha = a(x_1 + x_2)_\alpha + b(y_1 + y_2)_\alpha =$$

$$(ax_1 + by_1)_\alpha + (ax_2 + by_2)_\alpha =$$

$$(a(x_1)_\alpha + b(y_1)_\alpha) + (a(x_2)_\alpha + b(y_2)_\alpha) \in A + B,$$

再据命题 1(1), 可以证明 $A + B$ 为 X 中 Fuzzy 凸锥.

性质 3 设 E 是 X 中任一 Fuzzy 线性流形, 即有 Fuzzy 线性子空间 E_0 , 使 $E = E_0 + x, x \in X$, 则 E 是 Fuzzy 凸锥, 又 Fuzzy 凸锥的平移仍是 Fuzzy 凸锥.

证 因任何 Fuzzy 线性子空间必为 Fuzzy 凸锥, 此结论显然.

性质 4 设 A 为 Fuzzy 赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的 Fuzzy 集, 则 A 的内部 $\overset{\circ}{A}$ 为 Fuzzy 凸锥.

证 $\forall x_\alpha, y_\beta$ 则存在 $U_{\varepsilon_1}(x) \subset A$ 和 $U_{\varepsilon_2}(y) \subset A$, 使 $x_\alpha \in U_{\varepsilon_1}, y_\beta \in U_{\varepsilon_2}$, 从而 $\|x_\alpha\| < \varepsilon_1, \|y_\beta\| < \varepsilon_2$ 取 $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ 则 $\|x_\alpha\| < \varepsilon$ 及 $\|y_\beta\| < \varepsilon$ 又设 $y_\mu \in U_{\varepsilon}(y) (\mu \geq \beta)$ 于是 $\|y_\mu\| < \varepsilon$, 不妨设 $\|y_\mu\| = t > 0$, 则由 Fuzzy 范数公理(5) $\forall \varepsilon' > 0$ 存在 $0 < \delta(\varepsilon, y) < \mu$ 使 $\|y_{\mu-\delta}\| < \|y_\mu\| + \varepsilon' =$

$t + \varepsilon'$, 令 $\varepsilon < \lambda < 2\varepsilon - t$ 则因 $\mu = \{U_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ 为 $(X, \|\cdot\|)$ 中基环, 那么 $U_\lambda \cap (1 - \mu + \delta)^*$ 为 θ_μ 的重域, 从而 $y + U_\lambda \cap (1 - \mu + \delta)^*$ 为 y_μ 的重域, 于是设 $x_\beta \widetilde{\subset} y + U_\lambda \cap (1 - \mu + \delta)^*$, 则得 $(x - y)_\beta \widetilde{\subset} U_\lambda$ 及 $\beta > \mu - \delta$, 从而 $\|(x - y)_\beta\| < \lambda$ 及 $\|y_\beta\| < \|y_{\mu - \delta}\| < t + \varepsilon'$, 所以 $\|x_\beta\| \leq \|(x - y)_\beta\| + \|y_\beta\| < \lambda + t + \varepsilon'$, 由 ε' 的任意性得

$\|x_\beta\| < \lambda + t < 2\varepsilon - t + t = 2\varepsilon$, 即 $x_\beta \widetilde{\subset} U_{2\varepsilon}$, 又易知, 对任何 $\alpha > 0$, $U_{\alpha\varepsilon} = \alpha U_\varepsilon$,

事实上 $\forall x_\alpha \widetilde{\subset} U_{\alpha\varepsilon} \Leftrightarrow \|x_\alpha\| < \alpha\varepsilon \Leftrightarrow \|\frac{1}{\alpha}x_\alpha\| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}x_\alpha \widetilde{\subset} U_\varepsilon \Leftrightarrow x_\alpha \widetilde{\subset} \alpha U_\varepsilon$

从而由 $x_\beta \widetilde{\subset} U_{2\varepsilon} = 2U_\varepsilon$, $y_\beta \widetilde{\subset} U_\varepsilon$ 即得对任何 $a > 0$, $b > 0$, $ax_\beta + by_\beta \widetilde{\subset} 2aU_\varepsilon + bU_\varepsilon \subset 2aA + bA$ (见引理 1) $\subset A$ (见命题 1(3)), 即 $ax_\beta + by_\beta \in \overset{\circ}{A}$, 故由命题 1(2) 知 $\overset{\circ}{A}$ 为 Fuzzy 凸锥。

性质 5 设 A 为 Fuzzy 赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中 Fuzzy 凸锥, 则 A 的闭包 $\bar{A}$ 为 Fuzzy 凸锥。

证 $\forall x_\alpha, x_\beta \in \bar{A}$ ($\alpha \geq \beta$), 因 $u = \{U_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ 为 Fuzzy 赋范空间中基环, 故对任意 $\varepsilon > 0$, $x + U_\varepsilon \cap (1 - \alpha + \varepsilon_\alpha^{(n)})^*$ 为 x_α 的任一重域, 其中 $0 < \varepsilon_\alpha^{(n)} < \alpha$, $\varepsilon_\alpha^{(n)} \downarrow 0$, 由于 $x_\alpha \in \bar{A}$, 则存在 Fuzzy 网 $S_1 = \{S_n : n \in D\} \subset A$, 且 S_1 最终重于 $x + U_\varepsilon \cap (1 - \alpha + \varepsilon_\alpha^{(n)})^*$, 不妨设存在某个 $S_n = Z_\mu$ 与之相重, 即 $Z_\mu \widetilde{\subset} x + U_\varepsilon \cap (1 - \alpha + \varepsilon_\alpha^{(n)})^*$, 从而有 $(z - x)_\mu \widetilde{\subset} U_\varepsilon$ 及 $\mu \geq \alpha \geq \beta$, 由此得 $Z_\mu \widetilde{\subset} x + U_\varepsilon \cap (1 - \beta + \varepsilon_\beta^{(n)})^*$, 其中 $0 < \varepsilon_\beta^{(n)} < \beta$, $\varepsilon_\beta^{(n)} \downarrow 0$, 即网 S_1 最终重于 x_β 的任一重域。同理因 $y_\beta \in \bar{A}$, 则存在 Fuzzy 网 $S_2 = \{S_m : m \in D\} \subset A$, 且网 S_2 最终重于 y_β 的任一重域, 亦即存在某个 $S_m = t_\lambda$ 使得 $t_\lambda \widetilde{\subset} y + U_\varepsilon \cap (1 - \beta + \varepsilon_\beta^{(n)})^*$, 因此对任何 $a > 0$, $b > 0$,

$\alpha Z_\mu + bt_\lambda \widetilde{\subset} ax + U_{\alpha\varepsilon} \cap (1 - \beta + \varepsilon_\beta^{(n)})^* + by + U_{b\varepsilon} \cap (1 - \beta + \varepsilon_\beta^{(n)})^* = (ax + by) + (U_{\alpha\varepsilon} + U_{b\varepsilon}) \cap (1 - \beta + \varepsilon_\beta^{(n)})^*$

上式右端易知是 $ax_\alpha + by_\beta$ 的任一重域, 从而存在网 $aS_1 + bS_2 \subset aA + bA$ (见引理 1) $\subset A$ (见命题 1(3)) 且网 $aS_1 + bS_2$ 收敛于 $ax_\alpha + by_\beta$, 即 $ax_\beta + by_\beta \in \bar{A}$, 由命题 1(2) 知 $\bar{A}$ 为 Fuzzy 凸锥。

性质 6 设 A 为 Fuzzy 赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中 Fuzzy 凸锥, 则 A 的凸包 $\text{Conv}(A)$ 为 Fuzzy 凸锥。

证 由 [3] 知, 对每一 $x \in X$ 和 $p \in N$, 令

$$\mathcal{C}(x, p) = \{\{x_1, \dots, x_p\} \subset X \mid \text{存在 } \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\}$$

$$\text{则 } \text{Conv}A(x) = \sup_{n \in N} \sup_{V \in \mathcal{C}(x, p)} \inf\{A(t) : t \in V\}$$

因此 $\forall x_\alpha, y_\beta \in \text{Conv}(A)$ ($\alpha \geq \beta$), 得到

$$x_\alpha \widetilde{\subset} \text{Conv}(A) \Leftrightarrow \text{Conv}A(x) = \sup_{V \in \mathcal{C}(x, p)} \inf\{A(t) : t \in V\} > 1 - \alpha \Leftrightarrow$$

存在 $p \in N$, $V \in \mathcal{C}(x, p)$, 使 $\inf\{A(t) : t \in V\} > 1 - \alpha \Leftrightarrow$ 存在 $p \in N$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, 使 $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i t_i$ 且 $A(t_i) > 1 - \alpha$ ($i = 1, 2, \dots, p$) $\Leftrightarrow$ 存在 $p \in N$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, 使 $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i t_i$ 且 $(t_i)_\alpha \widetilde{\subset} A$ ($i = 1, 2, \dots, p$)

同理得 $y_\beta \widetilde{\subset} \text{Conv}(A) \Leftrightarrow$ 存在 $p \in N$, $\gamma_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^p \gamma_i = 1$, 使 $y = \sum_{i=1}^p \gamma_i s_i$ 且 $(s_i)_\beta \widetilde{\subset} A$ ($i = 1, 2, \dots, p$), 因 A 为 Fuzzy 凸锥, 由命题 1(1) 故对任何 $a > 0$, $b > 0$,

$$\frac{2\lambda_i \cdot a}{\lambda_i + \gamma_i} (t_i)_\alpha + \frac{2\gamma_i \cdot b}{\lambda_i + \gamma_i} (s_i)_\alpha \widetilde{\subset} A \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

因此由存在 $p \in N$, $\frac{\lambda_i + \gamma_i}{2} \geq 0$, $\sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i + \gamma_i}{2} = 1$ 且

$$ax + by = \sum_{i=1}^p \lambda_i (at_i) + \gamma_i (bs_i) = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i + \gamma_i}{2} \left(\frac{2\lambda_i \cdot a}{\lambda_i + \gamma_i} t_i + \frac{2\gamma_i \cdot b}{\lambda_i + \gamma_i} s_i \right)$$

及 $\frac{2\lambda_i \cdot a}{\lambda_i + \gamma_i} (t_i)_\alpha + \frac{2\gamma_i \cdot b}{\lambda_i + \gamma_i} (s_i)_\alpha \widetilde{\subset} A$ ($i = 1, 2, \dots, p$)

$$\Rightarrow (ax + by)_\alpha = ax_\alpha + by_\alpha \widetilde{\subset} \text{Conv}(A)$$

由命题 1(1) 得 $\text{Conv}(A)$ 为 Fuzzy 凸锥。

其次我们再给出模糊赋范空间中两个相关命题的证明。

设 $(X, \|\cdot\|)$ ($Y, \|\cdot\|$) 为 Fuzzy 赋范空间, $f: X \rightarrow Y$ 为线性双射, A, B 为 X 中 Fuzzy 集, $a, b \in K$, 则可证 $f(aA + bB) = af(A) + bf(B)$

特别有 $f(a(x_1)_\lambda + b(x_2)_\mu) = a(f(x_1))_\lambda + b(f(x_2))_\mu$

命题 2 设 $(X, \|\cdot\|)$ ($Y, \|\cdot\|$) 为 Fuzzy 赋范空间, $f: X \rightarrow Y$ 为线性双射, 则 f 为 Fuzzy 连续映射当且仅当 f 在 $\theta_\lambda \in \widetilde{X}$ 连续 ($\lambda \in (0, 1]$)

证 必要性显然。

充分性 设 f 在 θ_λ 连续, 则对 $(Y, \|\cdot\|)$ 中 θ_λ 的任一重域 $B = V_{\varepsilon'} \cap (1 - \lambda + \varepsilon_\lambda^{(m)})^*$ (其中 $\{V_{\varepsilon'} \mid \varepsilon' > 0\}$ 为 $(Y, \|\cdot\|)$ 中基环), 存在 $(X, \|\cdot\|)$

||) 中 θ_λ 的重域 $A = U_\epsilon \cap (1 - \lambda + \epsilon_\lambda^{(n)})^*$, 使 $f(A) \subset B$, 易知 $\forall t_\mu \in A \Leftrightarrow t_\mu \in U_\epsilon$ 且 $\mu \geq \lambda$, 又 $t_\mu \in A \Leftrightarrow f(t_\mu) = s_\mu \in f(A) \Rightarrow s_\mu \in B$ (此式前面的等价性可证明如下, 事实上

$$t_\mu \in A \Leftrightarrow A(t) > 1 - \mu \Leftrightarrow f(A)(s) = \sup \{A(t) | t = f^{-1}(s)\} = A(t) > 1 - \mu \Leftrightarrow s_\mu \in f(A))$$

而 $s_\mu \in B \Leftrightarrow s_\mu \in V_\epsilon$, 且 $\mu \geq \lambda$, 从而

$$t_\mu \in U_\epsilon, \mu \geq \lambda \Rightarrow f(t_\mu) \in V_\epsilon, \mu \geq \lambda \quad (*)$$

设 $x_\lambda \in \tilde{X}$, 今在 $(Y, \|\cdot\|)$ 中对 $f(x_\lambda) = y_\lambda$ 的任一重 $V = y + V_\epsilon \cap (1 - \lambda + \epsilon_\lambda^{(m)})^*$, 则易知 $\forall z_\mu \in V \Leftrightarrow (z - y)_\mu \in V_\epsilon, \mu \geq \lambda$, 令 $f(p_\mu) = z_\mu$, 则在 $(X, \|\cdot\|)$ 中对 x_λ 的重域 $U = x + U_\epsilon \cap (1 - \lambda + \epsilon_\lambda^{(n)})^*$,

易知若 $p_\mu \in U \Rightarrow (p - x)_\mu \in U_\epsilon, \mu \geq \lambda$, 于是由 $(*)$ 式可得

$$p_\mu \in U \Rightarrow (f(p_\mu) - f(x_\mu)) \in V_\epsilon, \mu \geq \lambda \Rightarrow$$

$$(z_\mu - y_\mu) \in V_\epsilon, \mu \geq \lambda \Rightarrow z_\mu \in V$$

即 $p_\mu \in U \Leftrightarrow f(p_\mu) = z_\mu \in f(U) \Rightarrow z_\mu \in V$, 从而 $f(U) \subset V$.

这证明 f 在任意 $x_\lambda \in \tilde{X}$ 连续, 即 f 为 Fuzzy 连续映射. 参考文献:

[1] 吴从炘, 方锦暄. Kolmogoroff 定理的 Fuzzy 推广[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1984(4): 4-6.

[2] 蒲保明, 刘应明. 不分明拓扑学 I—不分明点的邻近构造与 Moore-Smitn 式收敛[J]. 四川大学学报, 1977(1): 41.

[3] 张文修. 模糊数学引论[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1991.

[4] 吴从炘, 方锦暄. 有界性与局部有界 Fuzzy 拓扑线性空间[J]. 模糊数学, 1985(4): 31.

Certain Properties of Convex Cone in Fuzzy Normed Space and the Testification of Two Relevant Propositions

GE Yu-feng

(Department of Basic Science of Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224003, China)

Abstract: The author illustrates in this article the properties of fuzzy convex cone based on the fuzzy normed space, furthermore, testifies the two relevant propositions in the fuzzy normed space.

Keywords: fuzzy convex cone; linear space; fuzzy normed space

射。

下面证明命题 3 涉及到“平衡 Fuzzy 集”、“Q-吸收集”、“有界 Fuzzy 集”等概念, 可参阅文献 [3].

命题 3 Fuzzy 赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 是 θ 邻域吸收空间。

证 由文献 [1] 定理 2 知, U_1 (由 (1) 式所定义) 是 Fuzzy 凸集, 现证 U_1 是平衡的, $\forall x_\alpha \in U_1$, 则 $\|x_\alpha\| < 1$, 于是对任何 $|a| \leq 1$, $\|ax_\alpha\| = |a|$

$\|x_\alpha\| < 1$, 从而 $ax_\alpha \in U_1$, 故 U_1 是平衡的。

又易知 U_1 是 θ 的有界 Fuzzy 邻域, 事实上, U_1 是 θ 的 Fuzzy 邻域已由 [1] 命题 6 所证。下证 U_1 有界, 对于 $\forall \lambda \in (0, 1)$ 和 θ_λ 的任一重域 V_λ , 由 [1] 定理 1 因 $u = \{U_\epsilon | \epsilon > 0\}$ 为 Fuzzy 赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中基环, 故存在某一 $U_\epsilon \in u$ 和 $0 < \epsilon_\lambda^{(M)} < \lambda$, 使 $U_\epsilon \cap (1 - \lambda + \epsilon_\lambda^{(M)})^* \subset V_\lambda$, 但 $U_\epsilon = \epsilon U_1$, 于是我们 $\epsilon U_1 \cap (1 - \lambda + \epsilon_\lambda^{(M)})^* \subset V_\lambda$, 即 $U_1 \cap (1 - \lambda + \epsilon_\lambda^{(M)})^* \subset \frac{1}{\epsilon} V_\lambda$, 这证明 U_1 是有界的, 因此 U_1 是 θ 的有界凸 Fuzzy 邻域, 由 [4] 定理 1.1 知, 存在 θ 的平衡 Q—吸收邻域 V , 使 $V \subset U_1$, 从而 U_1 显然就是 Q—吸收的, 这蕴含 U_1 Q—吸收 $(X, \|\cdot\|)$ 中每一个有界 Fuzzy 开集, 又据 [1] 命题 6 知 U_1 是 θ 的开邻域, 所以结论成立。