第 15 卷 第 4 期 盐城工学院学报(自然科学版) Vol.15 No.4
2002 年 12 月 Journal of Yancheng Institute of Technology(Natural Science) Dec. 2002

圆柱体在斜面上运动的研究*

刘雨龙
(盐城工学院 基础科学部,江苏 盐城 224003)

摘 要:圆柱体在斜面上的运动是一个综合性较强的物理问题,它涉及到力学中的许多基本问题。对斜面静止和运动的两种情形进行分析讨论。在相同的情形中,用不同的讨论方法,可以得出相同的结果。

关键词:质心;纯滚动;瞬时轴;惯性力
中图分类号:O411 **文献标识码**:A **文章编号**:1671-5322(2002)04-0072-03

在许多工科力学教材中都把圆柱体在斜面上的运动作为转动的典型例题讲解。通常仅考虑斜面是静止的情形,而没有具体地分析圆柱体在斜面上作纯滚动的条件。但如果斜面是运动的,问题就变得更加复杂,涉及到牛顿第二定律、动量、机械能、转动和相对运动等许多知识。本文将斜面分为静止和运动两种情形,分析圆柱体在斜面上作纯滚动的条件,用不同的分析方法,求出圆柱体质心加速度的大小。现以一匀质实心的圆柱体在斜面上的运动为例进行讨论。

1 斜面是静止的

如图 1 所示,设圆柱体的质量为 m,半径为 r,斜面的质量为 M,斜面与水平面之间的夹角为 θ,圆柱体对其几何轴的转动惯量为 $J_c = \frac{1}{2}mr^2$。

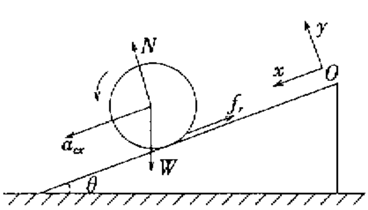

图 1 圆柱体在静止斜面上滚动

Fig.1 Rolling movement of a cylinder on a still oblique plane

1.1 求圆柱体作纯滚动的条件及质心加速度 a_{cx}

根据转动定律和牛顿第二定律得:

$$f_r \cdot r = J_c$$
$$W\sin\theta - f_r = ma_{cx}$$

要使圆柱体只滚不滑,那么此时 $\beta = \frac{a_{cx}}{r}$,$a_{cy} = 0$

解得:$f_r = \frac{W\sin\theta}{3}$,$a_{cx} = \frac{2}{3}g\sin\theta$

而 $f_r = \mu W\cos\theta$,则得:$\mu = \frac{\tan\theta}{3}$。

故当 $\mu < \frac{\tan\theta}{3}$ 时,圆柱体将在斜面上滑动。

1.2 圆柱体质心加速度的另外两种求法

(1)用瞬时轴方法求解[1]

考虑圆柱体绕瞬时轴 P 转动,则 $M = J\beta$,M 为通过 P 点的瞬时轴的力矩,是由重力 W 产生,J 是圆柱体通过 P 点的瞬时轴的转动惯量,见图 2。根据平行轴定理:$J = mr^2 + \frac{1}{2}mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$,

则:$rW\sin\theta = \frac{3}{2}mr^2\beta$

由于是无滑动的纯滚动 $a_{cx} = r\beta$

解得:$a_{cx} = \frac{2}{3}g\sin\theta$,与前面的结果一致。

(2)用机械能守恒定律求解

因为圆柱体为无滑动的纯滚动,所以摩擦力不作功且没有外力作功,故机械能守恒。圆柱体

* 收稿日期:2002-09-05
作者简介:刘雨龙(1965-),男,江苏盐城人,盐城工学院讲师,上海理工大学在职硕士研究生,主要从事物理学教学和理论方面的研究。

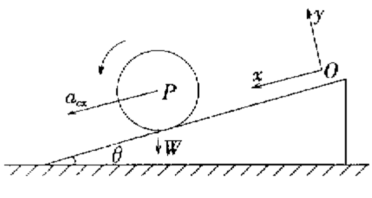

图 2　圆柱体绕瞬时轴转动

Fig.2　Rolling movement of a cylinder on the instantaneous axis

沿斜面滚下 x 距离时,其质心下降一竖直高度 $h = x\sin\theta$,其势能减少为 $Wx\sin\theta$,圆柱体在斜面顶端是静止的,动能为零。设圆柱体在底端时的势能为零,斜面的长度为 l,则:

$$Wl\sin\theta = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_cW^2$$

式中等号右边第一项为平动动能,第二项为绕质心的转动动能 $J_c = \frac{1}{2}mr^2$,$W^2 = v_c^2/r^2$

所以
$$Wl\sin\theta = \frac{3}{4}mv_c^2$$
$$v_c^2 = \frac{4}{3}gl\sin\theta$$

而 $v_c^2 = 2a_{cx}l$　　故 $a_{cx} = \frac{2}{3}g\sin\theta$

与前面的结果也完全一致。

这里求出的是纯滚动时 $a_{cx} = \frac{2}{3}g\sin\theta$ 和 $v_c = \sqrt{\frac{4}{3}g\sin\theta}$,我们不难求出圆柱体纯滑动($f_r = 0$)时,$a_{cx} = g\sin\theta$,$v_c = \sqrt{2gl\sin\theta}$,所以,可以得到 :纯滚动与纯滑动两种情形中,两者的加速度之比是 2/3,两者速度之比是 $\sqrt{2/3}$。

2　斜面运动

如图 3 所示,斜面质量为 M,放在光滑的水平面上,它以 a_1 的加速度向右运动,斜面与水平面之间的夹角为 θ,圆柱体的质量为 m,半径为 r,圆柱体对其几何轴的转动惯量为 $J_c = \frac{1}{2}mr^2$,圆柱体质心在斜面的对称平面内。

2.1　求圆柱体作纯滚动的条件及相对于斜面的质心加速度 a_c。

对于斜面,在水平方向上

$$N\sin\theta - f\cos\theta = Ma_1 \quad ①$$

对于圆柱体,由刚体的转动定理得:

$$f \cdot r = J_c\beta \quad ②$$

由质心运动定得:

$$\boldsymbol{W} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}_c \quad ③$$

其在水平方向和沿斜面方向的投影式分别为:

$$N\sin\theta - f\cos\theta = m(a_c\cos\theta - a_1) \quad ④$$

和
$$W\sin\theta - f = m(a_c - a_1\cos\theta) \quad ⑤$$

要使圆柱体作纯滚动,那么此时 $a_c = r\beta$　⑥

联立①②④⑤⑥解得:

$$f = \frac{(M+m)\cdot W\sin\theta}{3M + (3 - 2\cos^2\theta)m}$$

$$a_c = \frac{\sin\theta}{\frac{3}{2} - \frac{m}{M+m}\cos^2\theta}g$$

而
$$f = \mu m(g\cos\theta - a_1\sin\theta)$$

则
$$\mu = \frac{(M+m)g\sin\theta}{[3M + (3-2\cos^2\theta)m](g\cos\theta - a_1\sin\theta)}$$

故当 $\mu < \frac{(M+m)g\sin\theta}{[3M + (3-2\cos^2\theta)m](g\cos\theta - a_1\sin\theta)}$ 时,圆柱体将在斜面上滑动。

2.2　圆柱体质心加速度 a_c(相对于斜面)的另外两种求法

(1)用动能定理和动量守恒定律求解[2]

以斜面和圆柱体为系统,所受外力如图 4,W 为圆柱的角速度,v 为斜面相对于水平面的速度,v_c 为圆柱质心 c 相对于斜面的速度。外力 p 和 Mg 不作功,正压力和摩擦力是系统的内力,作功之和为零,只有外力 W 作功,根据动能定理

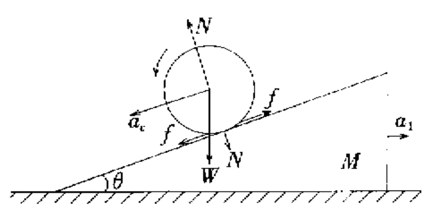

图 3　圆柱体在运动斜面上滚动

Fig.3　Rolling movement of a cylinder on a moving oblique plane

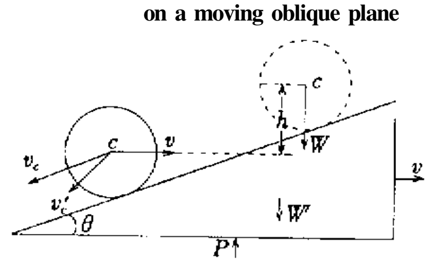

图 4　选地面为参考系

Fig.4　Choose the ground as the reference system

$$Wh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv_c'^2 + \frac{1}{2}J_cW^2 =$$
$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}m(v^2 + v_c^2 - 2vv_c\cos\theta) + \frac{1}{4}mr^2W^2 =$$

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2+\frac{1}{2}m(v_c^2-2vv_c\cos\theta)+\frac{1}{4}mr^2W^2 \quad ⑦$$

在水平方向上,不受外力,系统的角动量守恒,有

$$O = Mv + m(v - v_c\cos\theta) = (M + m)v - mv_c\cos\theta \quad ⑧$$

圆柱体作纯滚动 $v_c = rW$ ⑨

联立⑦⑧⑨解得

$$v_c^2 = 2gh/\left(\frac{3}{2} - \frac{m}{M + m}\cos^2\theta\right)$$

又 $$v_c^2 = 2a_c\frac{h}{\sin\theta}$$

故 $a_c = \dfrac{\sin\theta}{\dfrac{3}{2} - \dfrac{m}{M+m}\cos^2\theta}g$,与前面结果相同。

(2)用动量定理和动能定理求解[3]

选斜面为参考系,斜面和圆柱体组成的系统为研究对象,考虑惯性力,其受力情况如图 5,系统水平方向所受的外力的冲量为:

$$F_{惯}\Delta t + f_{惯}\Delta t = (M + m)a_1\Delta t$$

系统在水平方向动量的增量为:

$$mv_c\cos\theta = ma_c\cos\theta\Delta t$$

据动量定理:

$$(M + m)a_1\Delta t = ma_c\cos\theta\Delta t$$

则 $$a_1 = \frac{m\cos\theta}{M + m}a_c \quad ⑩$$

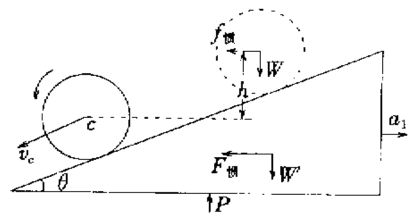

图 5 选运动的斜面为参考系

Fig.5 Choose the moving oblique plane as the reference system

$$F_{惯} = -Ma_1 \qquad f_{惯} = -ma_1$$

W'、P 和 $F_{惯}$ 不作功,W 作功为 Wh、$f_{惯}$ 作功为 $ma_1h/\tan\theta$,由动能定理得:

$$Wh + ma_1h/\tan\theta = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_cW^2 \quad ⑪$$

而 $v_c = rW$,代入⑪式,得:

$$Wh + ma_1h/\tan\theta = \frac{3}{4}mv_c^2 \quad ⑫$$

将⑩式和 $v_c^2 = 2a_ch/\sin\theta$ 代入⑫式,可得到

$a_c = \dfrac{\sin\theta}{\dfrac{3}{2} - \dfrac{m}{M+m}\cos^2\theta}g$,与前面结果同样相同。

3 结语

以上对圆柱体沿斜面运动的问题进行了分析讨论,分别求出了斜面静止和运动时,圆柱体作纯滚动的条件,分别用了不同的方法,得出了相同的结果。当然,还可以用另外的方法进行求解。例如:用机械能守恒定律和动量定理求解,读者如有兴趣,不妨试一试。

参考文献:

[1] 李宝锷.工科大学物理[M].天津:天津大学出版社,1987.

[2] 工科物理编辑部.工科物理[M].北京:清华大学出版社,1997.

Research on the movement of Cylinder on an Oblique Plance

LIU Yu-long

(Department of Basic Science of Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224003, China)

Abstract: The movement of cylinder on an oblique plane is a much comprehensive question, which covers many basic issues of mechanics. In this paper, the author analyzes it from two different aspects: stillness and movement. The conchcsion is that the same result can be achieved by different ways in a certain situation.

Keywords: centre of mass; rolling; instantaneous axis